КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра теории относительности и гравитации

Т. В. КРОПОТОВА, В. Г. ПОДОЛЬСКИЙ,
П. Е. КАШАРГИН

ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ.
1 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Казань — 2015

УДК 517.1

Принято на заседании кафедры теории относительности и гравитации
Протокол № 4 от 13 мая 2015 г.

Рецензент:
доктор физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики и математического моделирования КФУ **А.А. Попов**

Кропотова Т.В., Подольский В.Г., Кашаргин П.Е.
Введение в высшую математику. 1 семестр: Учебно-методическое пособие / Т.В. Кропотова, В.Г. Подольский, П.Е. Кашаргин. — Казань: Казанский университет, 2015. — 89 с.

Пособие представляет собой руководство по решению задач математической дисциплины «Введение в высшую математику», изучаемой на первом курсе Института физики КФУ. Оно содержит необходимые теоретические сведения, подробные решения типовых задач курса, упражнения и задачи для работы в аудитории и самостоятельной работы. Предназначено для студентов направлений подготовки «Радиофизика» и «Физика». Может быть полезным для всех, кто хочет систематизировать знания по элементарной математике и изучить некоторые ее дополнительные разделы, такие как «Метод математической индукции», «Элементы комбинаторики», «Бином Ньютона», «Комплексные числа».

Стандартные обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

$x \in \mathbb{X}$ — число x принадлежит множеству $\mathbb{X}$;

$x \notin \mathbb{X}$ — число x не принадлежит множеству $\mathbb{X}$;

$\Leftrightarrow$ — равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда;

$\Rightarrow$ — следует;

$\stackrel{\text{def}}{=}$ — по определению равно;

$D(f)$ — область определения функции $y = f(x)$;

$E(f)$ — множество значений функции $y = f(x)$;

const — константа, постоянная величина;

ч. т. д. — что и требовалось доказать.

Метод математической индукции

Для обоснования справедливости того или иного утверждения в математике используются дедуктивный и индуктивный методы. Дедуктивный метод — это рассуждение, начальным моментом которого является общее утверждение, а заключительным моментом — частный результат. Иными словами, дедукция — это переход от общего к частному. Если же, наоборот, опираясь на ряд частных результатов, делается общий вывод, то говорят, что использован индуктивный метод рассуждений. Более коротко, индукция — это переход от частного к общему.

Различают полную индукцию, когда общее утверждение доказывается перебором всех возможных частных случаев (это возможно лишь в ситуациях, когда число случаев конечно). И неполную индукцию, когда по нескольким частным случаям общее утверждение лишь «угадывается» и его истинность требует доказательства. В ситуации, когда утверждение охватывает бесконечное множество частных случаев, сделать непосредственную проверку для всех случаев просто невозможно. Для доказательства справедливости таких утверждений используют особый метод рассуждений, который называют методом математической индукции.

В основе метода математической индукции лежит принцип *математической индукции*, который принимается как аксиома и состоит в следующем:

Утверждение $A(n)$, зависящее от натурального числа n, справедливо при любом $n \geqslant n_0 \geqslant 1$, если:

1. Утверждение $A(n)$ справедливо при $n = n_0 \geqslant 1$.
2. Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n_0$, из справедливости $A(k)$ следует справедливость $A(k+1)$.

Доказательство методом математической индукции проводится в два этапа. Сначала проверяют справедливость доказываемого утверждения при наименьшем возможном для данного утверждения значении натурального числа $n = n_0$ (в большинстве случаев $n_0 = 1$). Эту часть доказательства называют *базисом индукции*. Далее следует второй этап доказательства, называемый *индукционным переходом или индукционным шагом*, где доказывают, что из справедливости утверждения при $n = k$ следует справедливость утверждения при $n = k + 1$.

Предпосылкой для принципа математической индукции являются следующие стандартные рассуждения: «Мы доказали базис и шаг индукции. Тогда утверждение $A(1)$ истинно, поскольку оно есть базис индукции. Применяя к нему индукционный переход, получаем, что истинно и утверждение $A(2)$. Применяя к нему индукционный переход, получаем, что истинно и утверждение $A(3)$. Применяя к нему индукционный переход, получаем, что истинно и утверждение $A(4)$. Этим способом мы можем испытать каждое значение n и убедиться, что $A(n)$ истинно. Следовательно, $A(n)$ справедливо для всякого $n \in \mathbb{N}$».

П р и м е р 1. Докажите, что для любого натурального n справедливо равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2. \tag{1}$$

◀[1] 1. Проверим справедливость утверждения при $n = 1$. Положив $n = 1$ в левой и правой части (1), получим

$$1^3 = 1^2 \quad \text{или} \quad 1 = 1,$$

что истинно.

2. Предположим, что равенство (1) выполняется при $n = k$, т.е.:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2. \tag{2}$$

Докажем, что при этом предположении равенство (1) будет выполнено и при $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k + (k + 1))^2. \tag{3}$$

[1] Для удобства читателя и с целью сокращения текста начало и конец доказательства условимся отмечать знаками ◀ и ▶ соответственно.

Таким образом, мы должны показать, что (2) $\Rightarrow$ (3). Используя в правой части равенств формулу для суммы n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

$$\text{в частности} \quad 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n,$$

перепишем соотношения (2) и (3) в виде:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{(k+1)^2 k^2}{4}, \tag{2$'$}$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+2)^2 (k+1)^2}{4}. \tag{3$'$}$$

Сделаем равносильный переход в равенстве ($2'$): прибавив к обеим частям слагаемое $(k+1)^3$, получим:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 k^2}{4} + (k+1)^3 =$$
$$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + (k+1) \right) = (k+1)^2 \cdot \frac{k^2 + 4k + 4}{4} =$$
$$= \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}.$$

Соединив начало и конец цепочки преобразований, получим

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+2)^2 (k+1)^2}{4}.$$

Таким образом, равенство ($3'$) можно получить в результате равносильных преобразований верного равенства ($2'$). Следовательно ($3'$) и (3) также являются верными.

Итак, равенство (1) справедливо при $n = 1$ и из его справедливости при $n = k$ следует справедливость и при $n = k + 1$. Согласно принципу математической индукции равенство (1) справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$. ►

П р и м е р 2. Докажите, что число $7^{n+1}+8^{2n-1}$ делится без остатка на 19 при любом натуральном n.

◀ 1. Проверим справедливость утверждения при $n=1$:

$$7^{1+1}+8^{2\cdot 1-1}=7^2+8=57 \;\Rightarrow\; 57:19=3 \quad \text{(верно)}.$$

2. Предположим, что для некоторого произвольного натурального $n=k$ число $7^{k+1}+8^{2k-1}$ делится на 19. Докажем, что при $n=k+1$ число $7^{k+2}+8^{2k+1}$ также делится на 19. Действительно,

$$7^{k+2}+8^{2k+1}=7\cdot 7^{k+1}+64\cdot 8^{2k-1}=$$
$$=7(7^{k+1}+8^{2k-1})+57\cdot 8^{2k-1}.$$

Каждое слагаемое суммы делится без остатка на 19, следовательно и сама сумма делится без остатка на 19.

Таким образом, утверждение доказано для $\forall n\in\mathbb{N}$. ▶

П р и м е р 3. Докажите неравенство

$$n^{n+1}>(n+1)^n \qquad (n\geqslant 3). \tag{4}$$

◀ 1. Проверим справедливость неравенства при $n=3$:

$$3^4=81, \quad 4^3=64, \quad 81>64 \quad \text{(верно)}.$$

2. Докажем, что из справедливости неравенства при произвольном натуральном $n=k$ $(k\geqslant 3)$:

$$k^{k+1}>(k+1)^k \tag{5}$$

следует справедливость неравенства при $n=k+1$:

$$(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}. \tag{6}$$

Используем равносильные преобразования: умножим неравенство (5) на $(k+1)^{k+2}$ и поделим на k^{k+1} (все числа положительны). Получим:

$$(k+1)^{k+2}>\frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}}. \tag{5$'$}$$

Покажем, что правая часть неравенства ($5'$) больше правой части неравенства (6):

$$\frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}} > (k+2)^{k+1}.$$

Действительно:

$$\frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}} = \frac{\left((k+1)^2\right)^{k+1}}{k^{k+1}} = \left(\frac{(k+1)^2}{k}\right)^{k+1} =$$

$$= \left(\frac{k^2+2k+1}{k}\right)^{k+1} = \left(k+2+\frac{1}{k}\right)^{k+1} > (k+2)^{k+1}.$$

Последнее неравенство очевидно, т.к.

$$k+2+\frac{1}{k} > k+2.$$

Итак,

$$(k+1)^{k+2} > \frac{(k+1)^{2k+2}}{k^{k+1}} > (k+2)^{k+1} \Rightarrow (k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}.$$

Таким образом, справедливость неравенства (6) доказана.
Согласно принципу математической индукции, неравенство (4) выполняется для любого $n \geqslant 3$. ►

П р и м е р 4. Последовательность Фибоначи определяется следующими условиями:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Докажите, что

$$a_{n+1} \cdot a_{n+2} - a_n \cdot a_{n+3} = (-1)^n. \tag{7}$$

◄ 1. Найдем, исходя из определения последовательности Фибоначи, её второй, третий и четвертый члены: $a_{1+1} = a_2 = 1$, $a_{1+2} = a_3 = 2$, $a_{1+3} = a_4 = 3$. Подставив их в (7), получим:

$$a_2a_3 - a_1a_4 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -1 = (-1)^1 \quad \text{(верно)}.$$

2. Предположим, что (7) справедливо при $n = k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{k+1} \cdot a_{k+2} - a_k \cdot a_{k+3} = (-1)^k. \tag{8}$$

Докажем его справедливость при $n = k + 1$, т.е.:

$$a_{k+2} \cdot a_{k+3} - a_{k+1} \cdot a_{k+4} = (-1)^{k+1},$$

используя (8) и определение последовательности Фибоначи:

$$\begin{gathered} a_{k+2} \cdot a_{k+3} - a_{k+1} \cdot a_{k+4} = a_{k+2} \cdot a_{k+3} - a_{k+1} \cdot (a_{k+3} + a_{k+2}) = \\ = a_{k+2} \cdot a_{k+3} - a_{k+1} \cdot a_{k+3} - a_{k+1} \cdot a_{k+2} = (a_{k+1} + a_k) \cdot a_{k+3} - \\ - a_{k+1}a_{k+3} - a_{k+1}a_{k+2} = a_{k+1}a_{k+3} + a_k a_{k+3} - \\ - a_{k+1}a_{k+3} - a_{k+1}a_{k+2} = -(a_{k+1}a_{k+2} - a_k a_{k+3}) = \\ = -(-1)^k = (-1)^{k+1}. \end{gathered}$$

Итак, база и индукционный шаг доказаны. Согласно принципу математической индукции, неравенство (7) выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$. ▶

Задание для решения в аудитории

Применяя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа n справедливы следующие утверждения:

1.1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.2. $1 - 2^2 + 3^3 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

1.3. $3 + 20 + 168 + \ldots + (2n+1) \cdot 2^{n-1} \cdot n! = 2^n \cdot (n+1)! - 1.$[2]

1.4. $\dfrac{2}{3 \cdot 4} + \dfrac{3}{4 \cdot 5} \cdot 2 + \dfrac{4}{5 \cdot 6} \cdot 2^2 + \ldots + \dfrac{n+1}{(n+2) \cdot (n+3)} \cdot 2^{n-1} = \dfrac{2^n}{n+3} - \dfrac{1}{3}$.

[2] Факториал натурального числа n (обозначается $n!$, произносится «эн факториал») — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Например: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. По определению полагают $0! = 1$.

1.5. $\dfrac{0}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\ldots+\dfrac{n-1}{n!}=1-\dfrac{1}{n!}.$

1.6. $4^n > 3^n + 2^n \quad (n \geqslant 2).$

1.7. $2!\cdot 4!\cdot 6!\cdot\ldots\cdot(2n)! > ((n+1)!)^n \quad (n \geqslant 2).$

1.8. Число 5^n-3^n+2n кратно 4.

1.9. Число 6^n+20^n-1 кратно 25.

Задание для самостоятельной работы

Применяя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа n справедливы следующие утверждения:

1.10. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$

1.11. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

1.12. $\dfrac{1}{2}\cdot 2!+\dfrac{2}{2^2}\cdot 3!+\dfrac{3}{2^3}\cdot 4!+\ldots+\dfrac{n}{2^n}\cdot(n+1)!=\dfrac{(n+2)!}{2^n}-2.$

1.13. $4^n \geqslant 3^n+n^2.$

1.14. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$

1.15. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}.$

1.16. Число $11^{n+1}+12^{2n-1}$ кратно 133.

1.17. Число 7^n+3n-1 кратно 9.

Дополнительные примеры

Применяя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального n справедливы следующие равенства (неравенства):

1.18. $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},\quad x\neq 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

1.19. $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos 2^n x=\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x},\quad x\neq \pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

1.20. $\frac{2^{2n}}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2},\quad n>2.$

1.21. Докажите, что число $2^{2^n}+1$ оканчивается на 7 при $n\geqslant 2$.

1.22. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1},\quad n\in\mathbb{Z}.$

1.23. Дано: $a_1=3$, $a_2=15$, $a_{n+2}=5a_{n+1}-4a_n$. Докажите, что $a_n=4^n-1$, $n\in\mathbb{N}$.

1.24. Докажите, что сторона правильного многоугольника, имеющего число сторон, равное 2^n, выражается через радиус R описанной около многоугольника окружности следующей формулой:

$$a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2\ \text{раз}}}.$$

Элементы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания. Бином Ньютона

При решении некоторых практических и теоретических задач приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число этих комбинаций. Такие задачи называют комбинаторными, а раздел математики, в котором изучаются комбинаторные задачи, — комбинаторикой.[3]

Одним из важнейших правил комбинаторики является *комбинаторное правило умножения*. Суть его заключается в следующем: если объект A_1 может быть выбран k_1 способами, затем для каждого из таких выборов объекта A_1 другой объект A_2 может быть выбран k_2 способами, затем для каждого из таких выборов и объекта A_1, и объекта A_2 третий объект A_3 может быть выбран k_3 способами и т.д., включая m-й объект A_m, который может быть выбран k_m способами, то объект, состоящий в выборе всех m объектов вместе, т.е. объект «A_1, и A_2, и A_3, и $\ldots A_m$» может быть выбран $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_m$ способами.

П р и м е р 1. В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 32 команды. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, если любая команда может получить только одну медаль?

◀ Одну из медалей, например бронзовую, может получить одна из 32 команд (32 возможности). После того, как определился бронзовый призер, обладателем другой медали, например серебряной, может стать одна из оставшихся 31 команды (31 возможность). После того, как определились бронзовый и серебряный призеры, обладателем золотой медали может стать одна из оставшихся 30 команд (30 возможностей). Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали первенства, равно $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29760$ способам. ▶

[3] Термин «комбинаторный» впервые использовал немецкий философ, математик и дипломат Вильгельм Готфрид Лейбниц в «Диссертации о комбинаторном искусстве» в 1666 г.

П р и м е р 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 5, 6, 7, 8?

◀ Цифрой разряда тысяч, сотен, десятков и единиц составляемого числа может быть любая из этих цифр, т.е. для выбора цифры каждого разряда из четырех имеется пять возможностей. Следовательно, число четырехзначных чисел равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. ▶

П р и м е р 3. Сколько имеется семизначных натуральных чисел, в которых все цифры, стоящие на нечетных местах, различны?

◀ Количество вариантов расположения различных цифр на нечетных местах равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ (напомним, что при выборе цифры старшего разряда мы не можем использовать цифру 0, т.е. выбираем не из 10 существующих арабских цифр, а лишь из 9). Количество вариантов расположения цифр на четных местах равно $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Всего имеем $4536 \cdot 10^3 = 4536000$ чисел. ▶

При выборе k элементов из n различных элементов принято говорить, что они образуют *соединение* из n элементов по k. В зависимости от того, имеет значение порядок расположения элементов или нет, входят в соединение все n элементов или только их часть, различают три вида соединений: перестановки, размещения и сочетания.

Перестановки

Определение 2.1. *Перестановками* из n различных элементов называются соединения, которые состоят из всех n элементов и отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число всех перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка). Формулу для подсчета числа перестановок легко получить, если воспользоваться правилом умножения: $P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Таким образом

$$P_n = n! \tag{9}$$

П р и м е р 4. Сколько среди четырехзначных чисел, составленных из цифр 3, 5, 7, 9, чисел, кратных 15 (при составлении числа каждая цифра используется только один раз)?

◀ Число делится на 15, если оно делится на 3 и 5. Поскольку сумма цифр, используемых при составлении числа, равна $3+5+7+9=24$, а 24 делится на 3, то любое число, составленное из заданных цифр, делится на 3. Число будет делиться и на 5, если оно будет заканчиваться цифрой 5. Таким образом, в четырехзначных числах, удовлетворяющих условию задачи, последняя, четвертая, цифра равна 5, а первые три — перестановки оставшихся цифр 3, 7 и 9. Следовательно, количество чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно числу перестановок из 3 элементов $P_3 = 3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$. ▶

П р и м е р 5. На полке стоят 10 книг, из которых 4 — справочники. Сколькими способами можно расставить все эти книги, чтобы справочники стояли рядом в произвольном порядке?

◀ Комплект из четырех справочников можно поставить с 1 по 4 место, со 2 по 5 место, ..., с 7 по 10 место на полке, т.е. семью способами. При каждом таком фиксированном положении комплекта на полке справочники в нем можно расположить $P_4 = 4!$ способами, а оставшиеся шесть книг — $P_6 = 6!$ способами. Используя правило умножения, получим ответ на вопрос задачи: искомое количество способов равно $7 \cdot 4! \cdot 6! = 7 \cdot 24 \cdot 720 = 120\,960$. ▶

П р и м е р 6. Решите уравнение:

$$10 \cdot n \cdot P_{n-2} = P_n.$$

◀ Имеем:

$$10n \cdot (n-2)! = n! \;\Rightarrow\; \frac{n!}{n(n-2)!} = 10 \;\Rightarrow$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{n(n-2)!} = 10 \;\Rightarrow\; n-1 = 10 \;\Rightarrow\; n = 11. \;▶$$

Размещения

Определение 2.2. *Размещениями* из n элементов по k ($k \leqslant n$) называются соединения (наборы), которые содержат k элементов, выбранных из имеющихся n, и отличаются друг от друга либо составом, либо порядком расположения элементов.

Число всех возможных размещений из n элементов по k обозначают A_n^k (A — первая буква французского слова *arrangement* — размещение). Формулу для A_n^k можно получить, применяя последовательно правило умножения:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)). \qquad (10)$$

Заметим, что правая часть (10) содержит k множителей и при $k = n$ дает $n!$. Для удобства запоминания преобразуем формулу (10) следующим образом:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) =$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))\cdot(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Таким образом, число всех возможных размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Этот результат компактнее и легче запоминается, однако при конкретных вычислениях удобнее использовать формулу (10).

П р и м е р 7. В академической группе 25 человек. Сколькими способами можно из них выбрать старосту и профорга?

◀ В данной задаче каждый выбор двух человек отличается не только составом, но и их ролью в паре «староста–профорг». Таким образом, мы имеем дело с размещениями из 25 по 2, и искомое число способов равно $A_{25}^2 = 25 \cdot 24 = 600$. ▶

П р и м е р 8. В седьмом классе изучается 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

◀ Искомое число способов — число размещений из 14 по 5. Имеем:

$$A_{14}^{5} = \frac{14!}{(14-5)!} = \frac{14!}{9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{9!} =$$
$$= 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 = 240\,240. \ \blacktriangleright$$

Сочетания

Определение 2.3. *Сочетаниями* из n элементов по k $(k \leqslant n)$ называются соединения (наборы), которые содержат k элементов, выбранных из имеющихся n, и отличаются друг от друга только составом.

Отметим, что в отличие от размещений, в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы набора.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k (C — первая буква французского слова *combination* — сочетание). При выводе формулы для подсчета числа сочетаний используются полученные ранее формулы (9) и (10).

Рассмотрим множество, состоящее из n элементов. Из этих элементов составим все возможные сочетания по k (число таких сочетаний равно C_n^k). Теперь в каждом сочетании выполним все возможные перестановки (число таких перестановок равно P_k). В результате получим все размещения, которые можно составить из n элементов по k (число таких размещений равно A_n^k). Используя правило умножения, получим, что $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$, откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}. \quad (11)$$

П р и м е р 9. На полке 10 книг: англо-русский словарь и 9 книг на английском языке. Сколькими способами студент может выбрать из них 3 книги, если а) словарь нужен ему обязательно; б) словарь ему не нужен?

◀ В случае а) в каждом наборе обязательно должен находиться словарь. Остается выбрать две книги из 9. Имеем: $C_9^2 = \dfrac{9 \cdot 8}{2!} = 36.$

В случае б) словарь не нужен. Остается 9 книг, из которых нужно выбрать 3 книги. Число возможных способов равно

$$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84. \ \blacktriangleright$$

П р и м е р 10. Из 10 солдат, в число которых входят Петров и Сидоров, нужно отправить в наряд трех человек. Сколькими способами можно это сделать, если: а) Петров и Сидоров должны пойти в наряд обязательно; б) Петров и Сидоров должны остаться; в) Петров должен пойти в наряд, а Сидоров — остаться?

◀ В случае а) два человека (Петров и Сидоров) в наряд уже отобраны. Третьим человеком может быть любой из оставшихся 8 человек. Количество вариантов равно $C_8^1 = 8$.

В случае б) Петров и Сидоров в наряд не идут, поэтому три человека выбираются из оставшихся 8 солдат. Таким образом, искомое число способов равно $C_8^3 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56.$

В случае в) из 10 солдат 1 человек (Петров) в наряд уже выбран, 1 человек (Сидоров) в наряд не идет. Следовательно, еще два солдата, идущие в наряд, выбираются из $10 - 1 - 1 = 8$ человек. Количество возможных вариантов равно $C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{2!} = 28.$ ▶

П р и м е р 11. Докажите: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

◀ По формуле (11) имеем:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \ \blacktriangleright$$

Формула бинома Ньютона

Рассмотрим различные степени двучлена $(a+b)$ (или *бинома* $a+b$):

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1,\\
(a+b)^1 &= 1\cdot a + 1\cdot b,\\
(a+b)^2 &= 1\cdot a^2 + 2ab + 1\cdot b^2,\\
(a+b)^3 &= 1\cdot a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\cdot b^3,\\
(a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) =\\
&= 1\cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1\cdot b^4,\\
(a+b)^5 &= (a+b)^4(a+b) =\\
&= 1\cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1\cdot b^5.
\end{aligned}$$

Продолжая дальше, можно показать, что коэффициенты разложения степени бинома можно найти по схеме, называемой треугольником Паскаля:

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
\ldots
\end{array}$$

В каждой строке этой схемы коэффициенты разложения степени бинома, кроме первого и последнего, получаются попарным сложением коэффициентов предыдущей строки. Например, шестая строка получается так:

$$1,\quad 5=1+4,\quad 10=4+6,\quad 10=6+4,\quad 5=4+1,\quad 1.$$

Коэффициенты разложения степени бинома можно найти также с помощью формулы (11) для числа сочетаний (напомним, что по определению $0! = 1$ и, таким образом, $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \cdot n!} = 1$):

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= C_1^0 a + C_1^1 b,\\
(a+b)^2 &= C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2,\\
(a+b)^3 &= C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3,\\
(a+b)^4 &= C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4 \quad \text{и т.д.}
\end{aligned}$$

Методом математической индукции можно доказать формулу Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Эту формулу называют *биномом Ньютона*, а числа C_n^k — *биномиальными коэффициентами*. Кратко формулу можно записать так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{12}$$

Отметим, что биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от начала и конца разложения, равны между собой: $C_n^k = C_n^{n-k}$ (см. пример 11). Это свойство называют свойством симметрии биномиальных коэффициентов.

П р и м е р 12. Докажите, что

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

◀ Для доказательства достаточно в формуле (12) бинома Ньютона положить $a = b = 1$. ▶

П р и м е р 13. Запишите, используя (12), разложение $(1+x)^7$ по степеням x.

◀ $(1+x)^7 = C_7^0 + C_7^1 x + C_7^2 x^2 + C_7^3 x^3 + C_7^4 x^4 + C_7^5 x^5 + C_7^6 x^6 + C_7^7 x^7 =$

(используем свойство $C_n^{n-k} = C_n^k$)

$$= 1 + 7x + \frac{7\cdot 6}{2!}x^2 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}x^3 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}x^4 + \frac{7\cdot 6}{2!}x^5 + 7x^6 + x^7 =$$
$$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7. \quad \blacktriangleright$$

П р и м е р 14. Найдите сумму $C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^9$.

$$\blacktriangleleft\ C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^9 =$$
$$= (C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^9 + C_{10}^{10}) - C_{10}^0 - C_{10}^{10} =$$
$$= (\text{см. пример 12}) = 2^{10} - 2 = 1024 - 2 = 1022. \quad \blacktriangleright$$

П р и м е р 15. Найдите член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

◀ По формуле бинома Ньютона член разложения, содержащий x^3, имеет вид $C_{16}^k (x^{1/2})^k (x^{-1/3})^{16-k}$, причем показатель степени

$$\tfrac{k}{2} + \left(-\tfrac{1}{3}\right)\cdot(16-k) = 3,$$
$$\tfrac{k}{2} - \tfrac{16-k}{3} = 3 \quad \Rightarrow \quad 3k - 32 + 2k = 18,$$
$$5k = 50 \quad \Rightarrow \quad k = 10.$$

Искомый член разложения равен

$$C_{16}^{10}x^3 = \frac{16!}{6!\cdot 10!}x^3 = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^3 = 8008x^3. \ \blacktriangleright$$

Задание для решения в аудитории

2.1. Девочка помнит, что телефон подруги оканчивается цифрами 3, 5, 7, но забыла в каком порядке эти цифры следуют. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.

2.2. Сколько четырехзначных чисел, в записи которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр: а) 2, 3, 5, 6, 8; б) 0, 1, 4, 7, 9.

2.3. Сколько можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 7 (без их повторения) различных трехзначных чисел, которые являются: а) четными; б) кратными 5?

2.4. У студента на полке стоят 8 книг, 3 из которых на английском языке. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все книги на английском языке стояли рядом в произвольном порядке?

2.5. На станции 10 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 железнодорожных состава?

2.6. В магазине продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

2.7. Найдите значения выражений:

а) $\dfrac{8!}{7!\cdot 2!}$, б) $\dfrac{12!}{8!\cdot 4!}$, в) $\dfrac{7!\cdot 5!}{8!\cdot 4!}$, г) $\dfrac{(k+4)!(k+5)}{(k+6)!}$, д) $\dfrac{A_{12}^4\cdot A_7^7}{A_{12}^9}$.

2.8. От лаборатории, в которой работает 11 сотрудников, включая заведующего, нужно отправить 5 человек на конференцию. Сколькими способами это можно сделать, если: а) заведующий лаборатории должен поехать на конференцию, б) заведующий лаборатории должен остаться.

2.9. В цехе работают 8 токарей. Сколькими способами можно поручить трем из них изготовление трех различных видов деталей (по одному виду на каждого)?

2.10. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их выступления, если: а) Б не должен выступать раньше А; б) Б должен выступать сразу после А?

2.11. Решите уравнение относительно n, $n\in\mathbb{N}$:

а) $P_{n+3}=720A_n^5P_{n-5}$, б) $A_n^5=18A_{n-2}^4$, в) $12C_{n+3}^{n-1}=55A_{n+1}^2$.

2.12. Получите разложение степени бинома: $\left(2a - \dfrac{1}{2}\right)^5$.

2.13. Найдите члены разложения $\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^8$, являющиеся целыми числами.

Задание для самостоятельной работы

2.14. Сколько шестизначных чисел, в записи которых каждая цифра используется только один раз, можно составить из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 7?

2.15. Семь студентов на занятиях по физкультуре выстраиваются в ряд. В их число входят Олег и Фёдор. Найдите число возможных комбинаций, если: а) Олег должен находиться в конце ряда; б) Олег должен находиться в начале ряда, а Фёдор — в конце ряда; в) Олег и Фёдор должны стоять рядом.

2.16. В круговой диаграмме круг разбит на 5 секторов. Секторы окрашиваются разными красками из набора, содержащего краски 10 цветов. Сколькими способами это можно сделать?

2.17. Сколькими способами 6 студентов, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоят 20 одноместных столов?

2.18. На плоскости отмечено 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

2.19. Бригада состоит из 12 маляров и 5 плотников. Для ремонта объекта необходимо выделить 4 маляра и 2 плотника. Сколькими способами это можно сделать?

2.20. В шахматном кружке занимаются 16 человек. Сколькими способами тренер может выбрать из них для предстоящего турнира: а) команду из четырех человек; б) команду из четырех человек, указав при этом, кто из членов команды будет играть на первой, второй, третьей и четвертой досках?

2.21. Номер машины в некотором городе составляют из двух различных букв, взятых из набора A, B, C, D, E и трех различных цифр. Сколько машин можно обеспечить такими номерами?

2.22. Староста подсчитал, что существует 378 способов выбора двух делегатов из группы на конференцию. Сколько студентов в группе?

2.23. В правление кооператива избрано 9 человек. Из них нужно выбрать председателя, его заместителя, секретаря и бухгалтера. Сколькими способами это можно сделать?

2.24. Решите уравнения относительно n, $n \in \mathbb{N}$:
а) $\dfrac{P_n}{P_{n+1}} = \dfrac{1}{3}$, б) $A_{n+1}^2 = 156$, в) $C_n^3 = \dfrac{4}{15} C_{n+2}^4$.

2.25. Решите уравнение: $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}$.

2.26. На окружности отмечено 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

2.27. Запишите разложение степени бинома:
а) $(3x-2)^4$, б) $\left(\dfrac{a}{2} + 2\right)^6$.

2.28. Найдите член разложения $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2.

2.29. Найдите значение выражения: $\left(\dfrac{1}{3} C_{10}^7 - \dfrac{1}{3} C_7^2\right) \dfrac{P_5}{A_6^4}$.

2.30. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

Ответы

2.1. 6. **2.2**. а) 120; б) 96. **2.3**. а) 24, б) 12. **2.4**. 3600. **2.5**. 5040. **2.6**. 56. **2.7**. а) 4; б) 495; в) $\frac{5}{8}$; г) $\frac{1}{k+6}$; д) $\frac{3}{4}$. **2.8**. а) 210, б) 252. **2.9**. 336. **2.10**. а) 60, б) 24. **2.11**. а) 8, б) 9 и 10, в) 8. **2.12**. $32a^5-40a^4+20a^3-5a^2+\frac{5}{8}a-\frac{1}{32}$. **2.13**. 625, 7000, 7000, 1120, 16. **2.14**. 600. **2.15**. а) 720; б) 120; в) 1440. **2.16**. 30240. **2.17**. 27 907 200. **2.18**. 28. **2.19**. 4 950. **2.20**. а) 1 820; б) 43 680. **2.21**. 14 400. **2.22**. 28. **2.23**. 3 024. **2.24**. а) 2; б) 12; в) 4 и 8. **2.25**. 5. **2.26**. 220. **2.27**. а) $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$, б) $\frac{a^6}{64}+\frac{3}{8}a^5+\frac{15}{4}a^4+20a^3+60a^2+96a+64$. **2.28**. $120x^2$. **2.29**. 11. **2.30**.$\frac{15}{28}<x<\frac{10}{13}$.

Комплексные числа

Рассмотрим множество, элементами которого являются все упорядоченные пары действительных чисел. Напомним, что пара чисел называется упорядоченной, если указано, какое число из пары является первым и какое — вторым. Для элемента (x, y) рассматриваемого множества введем также более краткое обозначение: z. Таким образом, $z = (x, y)$, где x — первое число пары, y — второе, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Определение 3.4. *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара (x, y) действительных чисел x и y. При этом сумма, произведение, равенство комплексных чисел и отождествление некоторых из них с действительными числами определяются следующим образом.

1. Суммой комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число вида
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$
2. Произведением комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число вида
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$
3. Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
4. Комплексное число $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ отождествляется с действительным числом x (т.е. считается, что $(x, 0) = x$).

Для комплексного числа $z = (x, y)$ первое число упорядоченной пары x называют *действительной* частью и пишут $x = \operatorname{Re} z$, второе число y — *мнимой* частью комплексного числа и пишут $y = \operatorname{Im} z$.

Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$, при этом множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$.

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется комплексное число z, которое в сумме с z_2 дает z_1, т.е. $z = z_1 - z_2 \Leftrightarrow z + z_2 = z_1$. Исходя из определения суммы и равенства комплексных чисел нетрудно показать, что

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

Частным двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называется такое комплексное число z, которое при умножении на z_2 дает z_1, т.е. $z = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z \cdot z_2 = z_1$. Исходя из определения произведения и равенства комплексных чисел можно показать, что

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \tag{13}$$

Комплексные числа вида $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$ называются *мнимыми*. Число $(0, 1)$ называется *мнимой единицей*, для его обозначения используется буква i, т.е.

$$i = (0, 1).$$

Квадрат мнимой единицы легко найти, используя правило умножения комплексных чисел. Получим: $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, т.е.

$$i^2 = -1.$$

С помощью i любое мнимое число $(0, y)$ можно записать в виде iy:

$$(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0) = i \cdot y = iy,$$

а любое комплексное число — в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Запись комплексного числа $z = (x, y)$ в виде $z = x + iy$ называется *алгебраической формой комплексного числа*. Эта форма записи позволяет производить операции с комплексными числами аналогично операциям с алгебраическими многочленами.

Операции *сложения* и *вычитания* осуществляются теперь так:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

а операция *умножения* — так:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

В частности, для мнимой единицы имеем

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i,\ i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1,\ i^5 = i^4 \cdot i = i$$

и т.д.

Для упрощения операции деления введем еще один новый термин. Комплексные числа $x+iy$ и $x-iy$, т.е. числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными* (или *комплексно-сопряженными*). Число, сопряженное к комплексному числу z, обозначается $\bar{z}$. Таким образом, если $z = x+iy$, то сопряженное к нему число $\bar{z} = x - iy$. (Легко убедиться, что $\bar{\bar{z}} = z$.)

Отметим, что произведение комплексного числа на сопряженное к нему является неотрицательным *действительным* числом:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Вернемся к операции *деления* комплексных чисел. Конечно, при проведении практических вычислений мы не будем пользоваться громоздким выражением (13). Воспользуемся алгебраической формой записи комплексных чисел и основным свойством дроби — умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю. Далее выполним соответствующие действия с многочленами и получим алгебраическую форму частного:

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 + x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Перейдем к геометрической интерпретации комплексного числа. Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Всякое комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить на этой плоскости в виде точки с координатами x и y. При этом действительные числа $(x, 0) = x$ изображаются точками на оси абсцисс Ox, а мнимые числа $(0, y) = iy$ — точками на оси ординат Oy. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, координатная ось Ox называется *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*.

причем при использовании (15) необходимо дополнительно обратить внимание на то, в какой координатной четверти находится точка z.

Выразив из соотношений (14) x и y:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

и подставив их в алгебраическую форму записи комплексного числа $z = x + iy$, получим *тригонометрическую форму комплексного числа*:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Конечно, тригонометрическая форма записи комплексного числа выглядит более громоздко по сравнению с алгебраической, однако, если перемножить два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, и использовать при этом тригонометрические формулы, то обнаруживается неожиданный и красивый результат:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right) = \\ &= r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right). \end{aligned}$$

Оказывается, что
при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогичным образом нетрудно показать, что *при делении модули делятся, а аргументы вычитаются*. Как следствие, для натурального n справедлива формула Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Здесь символ z^n обозначает n-ую степень комплексного числа z: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n}$.

Итак, *при умножении и делении аргумент комплексного числа ведет себя точно так же, как и показатель степени*. В 1743 г. Леонард Эйлер показал, что $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$. Здесь $e = 2,71828\ldots$

— знаменитое число Эйлера. Соотношение

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{16}$$

носит название формулы Эйлера. Справедливы равенства

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

Используя (16), тригонометрическую форму можно преобразовать в более компактную *показательную форму комплексного числа*

$$z = re^{i\varphi}.$$

Показательная форма комплексного числа наиболее удобна при умножении и делении комплексных чисел:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(r_1e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2e^{i\varphi_2}\right) = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \qquad (17)\\ &= r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \qquad (18)\\ &= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right), \quad r_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Если комплексные числа z_1 и z_2 записаны в показательной форме:

$$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2e^{i\varphi_2},$$

то $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Комплексное число ω называют *корнем* n-ой степени из числа z (пишут $\omega = \sqrt[n]{z}$), если

$$\omega^n = z, n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Запишем z и ω в показательной форме и подставим в (20):

$$z = re^{i\varphi}, \quad \omega = \rho e^{i\psi}, \quad \left(\rho e^{i\psi}\right)^n = re^{i\varphi} \ \Leftrightarrow\ \rho^n e^{in\psi} = re^{i\varphi}.$$

Используя условия (19) равенства комплексных чисел, получим систему двух равенств

$$\rho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \sqrt[n]{r},\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Найдя ρ и ψ, «соберем» показательную форму записи ω:

$$\omega = \rho e^{i\psi} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},\ k \in \mathbb{Z}$$

и запишем итоговую формулу для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа $z = re^{i\varphi}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r}\, \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{21}$$

Таким образом, $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n *различных* значений, которые можно получить при указанных $k = \overline{0, n-1}$. Соответствующие этим значениям точки комплексной плоскости расположены в вершинах правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

П р и м е р 1. Найдите сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 5 - 4i$:

$$\blacktriangleleft \quad z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (5 - 4i) = 8 - 2i,$$
$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (5 - 4i) = -2 + 6i,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i)(5 - 4i) = 15 + 10i - 12i - 8i^2 =$$
$$= 15 - 2i + 8 = 23 - 2i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{5 - 4i} = \frac{(3 + 2i)(5 + 4i)}{(5 - 4i)(5 + 4i)} = \frac{15 + 10i + 12i + 8i^2}{25 + 16} =$$
$$= \frac{7 + 22i}{41} = \frac{7}{41} + i\frac{22}{41}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 2. Вычислите $\dfrac{5}{1+2i}+\dfrac{5}{2-i}$.

$$◀ \quad \frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}=5\left(\frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}+\frac{2+i}{(2-i)(2+i)}\right)=$$
$$=5\left(\frac{1-2i}{5}+\frac{2+i}{5}\right)=1-2i+2+i=3-i. \qquad ▶$$

П р и м е р 3. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

$$1)\ z_1=1+i,\quad 2)\ z_2=1-i\sqrt{3},\quad 3)\ z_3=\sqrt{3}+i,\quad 4)\ z_4=1-i.$$

4) $z_4 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$ ►

П р и м е р 4. Вычислите $\dfrac{(1+i)^5(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1-i)^7(1-i\sqrt{3})^{11}}$.

◄ В предыдущем примере, представляя комплексные числа $1+i$, $1-i\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$, $1-i$ в тригонометрической форме, мы нашли модули и аргументы этих чисел. Воспользуемся этими результатами и запишем числа в показательной форме:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\ 1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}},\ \sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}},\ 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Тогда

$$\frac{(1+i)^5(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1-i)^7(1-i\sqrt{3})^{11}} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{10}}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^7\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{11}} =$$

$$= 2^{\frac{5}{2}+10-\frac{7}{2}-11} \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{10\pi}{6}-\left(-\frac{7\pi}{4}\right)-\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\right)} = 2^{-2} \cdot e^{i\frac{25}{3}\pi} =$$

$$= 2^{-2}\left(\cos\frac{25}{3}\pi + i\sin\frac{25}{3}\pi\right) = 2^{-2}\left(\cos\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}.$$ ►

П р и м е р 5. Пользуясь формулой Муавра, выразите через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$: 1) $\cos 5\varphi$; 2) $\sin 5\varphi$.

◄ Рассмотрим комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ и возведем его в пятую степень двумя способами.

Сначала — используя формулу бинома Ньютона:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos^5\varphi + 5\cos^4\varphi \cdot (i\sin\varphi) + 10\cos^3\varphi \cdot (i\sin\varphi)^2 +$$

$$+ 10\cos^2\varphi \cdot (i\sin\varphi)^3 + 5\cos\varphi \cdot (i\sin\varphi)^4 + (i\sin\varphi)^5 =$$

$$= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi +$$

$$+5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi +$$
$$+ i(5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi).$$

Затем — с помощью формулы Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi.$$

Приравняв результаты разложений, получим:

$$\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi =$$
$$= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi +$$
$$+ i(5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. Таким образом,

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi. \ \blacktriangleright$$

П р и м е р 6. Найдите все значения $\sqrt[3]{8i}$.

◀ Определим модуль и аргумент числа $8i$ (для него $x = 0,\ y = 8$):

$$r = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8; \quad \cos\varphi = \frac{0}{8} = 0,\ \sin\varphi = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Воспользуемся формулой (21):

$$\sqrt[3]{8i} = 2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right),$$

где $k = 0, 1, 2$. Перебирая указанные значения k, получим

$$\text{при } k = 0 \quad \sqrt[3]{8i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$\text{при } k = 1 \quad \sqrt[3]{8i} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$\text{при } k = 2 \quad \sqrt[3]{8i} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Таким образом, искомые значения $\sqrt[3]{8i}$ равны $\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2i.$ ►

П р и м е р 7. Найдите все значения $\sqrt[4]{-625}$.

◄ Решив этот пример, мы убедимся, что на множестве комплексных чисел корень четвертой степени из отрицательного числа не только существует, но и имеет четыре различных значения. Аналогично предыдущему примеру определим модуль и аргумент -625: для него $x = -625,\ y = 0 \Rightarrow r = \sqrt{(-625)^2 + 0^2} = 625$;

$$\cos\varphi = \frac{-625}{625} = -1,\ \sin\varphi = \frac{0}{625} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi.$$

Воспользуемся формулой (21):

$$\sqrt[4]{-625} = 5e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}} = 5\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right);\ k = \overline{0,3}.$$

$$\text{При } k = 0 \quad \sqrt[4]{-625} = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{при } k = 1 \quad \sqrt[4]{-625} = 5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{при } k = 2 \quad \sqrt[4]{-625} = 5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - i\frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{при } k = 3 \quad \sqrt[4]{-625} = 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - i\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом,

$$\sqrt[4]{-625} = \left[\begin{array}{l} \frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{5\sqrt{2}}{2}, \\ -\frac{5\sqrt{2}}{2} + i\frac{5\sqrt{2}}{2}, \\ -\frac{5\sqrt{2}}{2} - i\frac{5\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} - i\frac{5\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right. \quad \blacktriangleright$$

П р и м е р 8. Решите уравнение:

$$z(1-i) + 3 = i.$$

◀ Это уравнение является алгебраическим уравнением первой степени (линейным). Выполнив необходимые алгебраические преобразования, получим:

$$z(1-i) + 3 = i \Leftrightarrow z(1-i) = i - 3 \Leftrightarrow z = \frac{i-3}{1-i};$$

$$z = \frac{(i-3)(1+i)}{(1-i)(1+i)}; \quad z = \frac{-4-2i}{1^2+1^2}; \quad z = -2 - i. \blacktriangleright$$

П р и м е р 9. Решите уравнение $z^2 + 3z + 3 = 0$.

◀ Это уравнение является алгебраическим уравнением второй степени (квадратным). В общем виде оно записывается следующим образом:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

где и коэффициенты $a (a \neq 0)$, b, c, и искомое z — комплексные числа. Для его решения можно использовать хорошо знакомую каждому школьнику формулу

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \tag{22}$$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного уравнения, а под $\sqrt{D}$ понимаются все значения корня второй степени. Если $D = 0$, то и $\sqrt{D} = 0$, и уравнение имеет один корень. Если $D \neq 0$, то $\sqrt{D}$ имеет два различных значения, и уравнение также имеет два различных корня. Уточним, что поскольку в множестве комплексных чисел операция извлечения квадратного корня имеет смысл для любого числа, ограничение $D > 0$ становится не только излишним, но и теряет смысл, т.к. для комплексных чисел понятия «больше», «меньше» не определены.

Для нашего конкретного уравнения по формуле (22) получим

$$z_{1,2} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Учитывая, что $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$, получим

$$z_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 10. Решите уравнение $z^2 - (5 + 2i)z + 9 + 7i = 0$.

◀ Данное уравнение также является квадратным. Его дискриминант

$$D = (-(5 + 2i))^2 - 4(9 + 7i) = 25 + 20i + 4i^2 - 36 - 28i =$$

$$= 25 - 4 - 36 + i(20 - 28) = -15 - 8i,$$

и для корней уравнения по формуле (22) получим

$$z_{1,2} = \frac{5 + 2i + \sqrt{-15 - 8i}}{2}.$$

Для нахождения всех значений $\sqrt{-15 - 8i}$ можно было бы использовать формулу (21), но в данной ситуации проще применить другой прием. Положим $\sqrt{-15 - 8i} = x + iy$, тогда

$$-15-8i = (x+iy)^2;\ -15-8i = x^2+2ixy-y^2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & -15, \\ 2xy & = & -8. \end{array} \right.$$

Таким образом, задача о нахождении значений квадратного корня свелась к решению системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y, где x и y — действительные числа. Решая систему, получим

$$y = -\frac{4}{x};\ x^2 - \frac{16}{x^2} + 15 = 0;\ \left(x^2\right)^2 + 15x^2 - 16 = 0;$$

что приводит к $x^2 = -16$ или $x^2 = 1$. Поскольку x — действительное число, случай $x^2 = -16$ является посторонним, а $x^2 = 1$ дает нам два решения $x = \pm 1$. Найдя соответствующие им значения y, получим:

$$x = 1;\ y = -4 \quad \text{или} \quad x = -1;\ y = 4.$$

Таким образом

$$\sqrt{-15 - 8i} = \left[\begin{array}{r} 1 - 4i, \\ -1 + 4i. \end{array}\right.$$

и

$$z_1 = \frac{5 + 2i + 1 - 4i}{2} = 3 - i; \quad z_2 = \frac{5 + 2i - 1 + 4i}{2} = 2 + 3i. \blacktriangleright$$

П р и м е р 11. Решите уравнение $z^3 - 6z - 9 = 0$.

◀ Это уравнение является алгебраическим уравнением третьей степени (кубическим), причем все его коэффициенты — целые числа. Напомним, что если у приведенного алгебраического уравнения с целыми коэффициентами есть целые корни, то они обязательно являются делителями свободного члена. Наше уравнение является приведенным, т.к. коэффициент при старшей степени равен единице, свободный член уравнения равен -9. Следовательно, если целые корни есть, то они могут совпадать только с $\pm 1;\ \pm 3;\ \pm 9$. Подставляя эти числа в исходное уравнение, убеждаемся, что $z = 3$ является его корнем, и, следовательно, левая сторона уравнения делится на $z - 3$ без остатка. Результат можно получить, произведя деление «уголком», или сгруппировав слагаемые и вынеся общий множитель. Мы рассмотрим второй способ.

$$z^3 - 6z - 9 = z^3 - 9z + 3z - 9 = z(z^2 - 9) + 3(z - 3) =$$

$$= z(z+3)(z-3) + 3(z-3) = (z-3)(z^2+3z+3).$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$(z-3)(z^2+3z+3) = 0,$$

которое сводится к совокупности двух случаев:

$$z = 3 \quad \text{и} \quad z^2+3z+3 = 0,$$

последний из которых рассмотрен в примере 9. Таким образом, исходное кубическое уравнение имеет три корня

$$z_1 = 3; \quad z_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \blacktriangleright$$

П р и м е р 12. Решите уравнение $z^6 = \sqrt{3} + i$.

◀ $z^6 = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{\sqrt{3}+i}$. Таким образом, решение данного уравнения сводится к нахождению корней шестой степени из комплексного числа $\sqrt{3}+i$. Представим $\sqrt{3}+i$ в показательной форме:

$$\sqrt{3} + i = (\text{см. примеры 3 и 4}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

и воспользуемся формулой (21). Получим $z = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{6}}$, $k = \overline{0;5}$ и

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{36}}, & z_1 &= \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{36}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{13\pi}{36}}, \\ z_2 &= \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{36}+\frac{4\pi}{6}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{25\pi}{36}}, & z_3 &= \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{36}+\frac{6\pi}{6}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{37\pi}{36}}, \\ z_4 &= \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{36}+\frac{8\pi}{6}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{49\pi}{36}}, & z_5 &= \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{36}+\frac{10\pi}{6}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{61\pi}{36}}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили все шесть различных корней исходного уравнения в показательной форме. На комплексной плоскости все найденные z_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ изображаются точками окружности радиуса $\sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат. Поскольку аргументы соседних точек отличаются друг от друга на $\frac{\pi}{3}$, полученные точки делят окружность на шесть равных частей, и, следовательно, являются вершинами правильного 6-угольника, вписанного в эту окружность. ▶

П р и м е р 13. Решите уравнение $z^2 + \bar{z} = 0$.

◀ Для решения этого уравнения искомое число z запишем в алгебраической форме: $z = x + iy$. Используя ее в уравнении, получим

$$(x+iy)^2 + (x - iy) = 0; \quad x^2 + 2ixy + (iy)^2 + x - iy = 0;$$

$$x^2 - y^2 + x + i(2xy - y) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y^2 + x & = & 0, \\ 2xy - y & = & 0. \end{array} \right.$$

Таким образом, задача свелась к решению системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными x и y. Второе уравнение системы можно записать в виде $(2x-1)y = 0$, оно допускает два случая $x = \frac{1}{2}$ (I) или $y = 0$ (II). В случае (I), подставив $x = \frac{1}{2}$ в первое уравнение системы, получим соответствующие ему значения y:

$$\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} = 0; \quad y^2 = \frac{3}{4}; \quad y_{1;2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В случае (II), подставив $y = 0$ в первое уравнение системы, получим соответствующие ему значения x:

$$x^2 - x = 0; \quad x(x-1) = 0; \quad x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Таким образом, рассматриваемая система, и, соответственно, исходное уравнение имеют четыре решения:

$$\begin{array}{llll} (1) \quad x = \frac{1}{2}, & y = \frac{\sqrt{3}}{2} & \Leftrightarrow & z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ (2) \quad x = \frac{1}{2}, & y = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \Leftrightarrow & z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ (3) \quad x = 0, & y = 0 & \Leftrightarrow & z_3 = 0; \\ (4) \quad x = 1, & y = 0 & \Leftrightarrow & z_4 = 1. \end{array}$$ ▶

П р и м е р 14. Найдите множество точек комплексной плоскости, заданное условием $\sin|z| > 0$.

◀ Выразим модуль комплексного числа через его действительную и мнимую части:

$$\text{если } z = x + iy \quad \text{то} \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

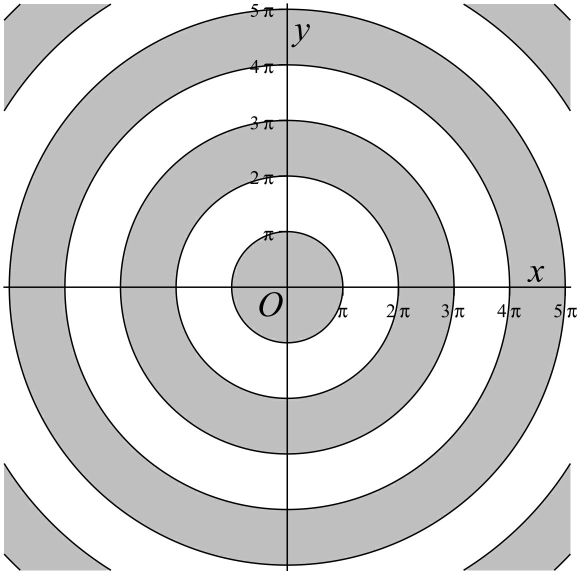


Рис. 3: Рисунок к примеру 14: множество точек комплексной плоскости, заданное условием $\sin|z| > 0$ представляет систему концентрических колец (заштрихованные области).

Записав условие задачи в переменных x и y, решим полученное тригонометрическое неравенство:

$$\sin\sqrt{x^2+y^2} > 0,$$

$$2\pi k < \sqrt{x^2+y^2} < \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$(2\pi k)^2 < x^2+y^2 < (\pi+2\pi k)^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Придавая k различные значения $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, получим

$$0 < x^2+y^2 < \pi^2,$$
$$(2\pi)^2 < x^2+y^2 < (3\pi)^2,$$
$$(4\pi)^2 < x^2+y^2 < (5\pi)^2 \qquad \text{и т.д.}$$

Ответ: система концентрических колец (множество всех точек в заштрихованных областях). ►

Задание для решения в аудитории

3.1. Вычислите:

$$i^9; \quad \frac{1}{i^5}; \quad i^{2014}; \quad i^{2015}.$$

3.2. Найдите $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$, если:

$$z_1 = -i + 3;\ z_2 = 1 + 2i.$$

3.3. Найдите число, сопряженное данному:

$$(1 + i)^3.$$

3.4. Получите алгебраическую форму числа:

а) $\dfrac{3 + i}{(1 + i)(1 - 2i)}$,

б) $\dfrac{2 - i}{i + 2} + (i - 1)^2$.

3.5. Выполните действия:

$$\frac{13 - 12i}{6i - 8} + \frac{(2i + 1)^2}{i + 2}.$$

3.6. Отметьте на плоскости точки, изображающие комплексные числа:

$$-\frac{i}{2};\ 2;\ 1 - i;\ \frac{i}{1 + i}.$$

3.7. Представьте комплексные числа в тригонометрической и показательной формах, используя главное значение аргумента:

а) $-4i$,

б) 5,

в) $-1+i$,

г) $-3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

3.8. Вычислите:

а) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^6$,

б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{20}$.

3.9. Найдите все корни n-й степени из числа z, если:

а) $z=-1;\ n=2$,

б) $z=-1+i;\ n=3$,

в) $z=i;\ n=4$.

3.10. Решите уравнения:

а) $z^6+64=0$,

б) $z^2+3z+4=0$,

в) $z^4+5z^2-6=0$,

г) $z^3+i=0$,

д) $z^2-(2+3i)z+4i-2=0$,

е) $z+|z|=2$.

3.11. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 6\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

3.12. Изобразите на комплексной плоскости области, которым принадлежат точки, изображающие числа $z=x+iy$, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $0 < \operatorname{Re}(3iz) < 2$.

б) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} > a$, где $a = \mathrm{const}$, $a \in \mathbb{R}$.

Задание для самостоятельной работы

3.13. Выполните действия:

а) $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{z_2}$, где $z_1 = 4+5i$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 7-9i$.

б) $\dfrac{(2-i)^2+8+12i}{2i-1} + \dfrac{4i-5}{i-1}$.

в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4$.

г) $(3+i)^3$.

д) $(2+i)^4 + (2-i)^4$.

3.14. Найдите действительные числа x и y, удовлетворяющие условиям:

а) $(1+i)x + (1-i)y = 3-i$.

б) $(2x-3yi)(2x+3yi) + xi = 97+2i$.

3.15. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство:

а) $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

б) $\overline{(z_1-z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

в) $\overline{(z_1\cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

г) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

3.16. Решите уравнение $z(1-2i)=2+5i$.

3.17. Найдите модуль и главное значение аргумента указанных комплексных чисел. Запишите эти числа в тригонометрической и показательной формах:

а) $1-i\sqrt{3}$.

б) $3\cos\dfrac{\pi}{4}-3i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

в) $2-2i$.

г) $6+6i$.

д) $\sqrt{3}+i$.

е) $-i\cos\dfrac{\pi}{8}-\sin\dfrac{\pi}{8}$.

ж) $3+4i$.

3.18. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\cos 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

3.19. Получите алгебраическую форму комплексного числа:

а) $\dfrac{\cos\dfrac{7\pi}{10}+i\sin\dfrac{7\pi}{10}}{\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}}$.

б) $\dfrac{i}{\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}}$.

в) $(1+i)\left(\cos\dfrac{3\pi}{8}+i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

г) $\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

д) $\dfrac{(1+i)^5(-\sqrt{3}-i)^{10}}{(i-1)^4(1-i\sqrt{3})^{11}}$.

е) $\dfrac{a\sqrt{b}+ib\sqrt{a}}{b\sqrt{a}-ia\sqrt{b}}$.

3.20. Решите уравнения:

а) $z^6 = 1$.

б) $z^4 + 81 = 0$.

в) $z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$.

г) $z^2 + z + 1 = 0$.

д) $z^4 + 10z^2 + 25 = 0$.

е) $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0$.

ж) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

з) $(z+1)^8 = (z-1)^8$.

и) $|z| - iz = 1 - 2i$.

3.21. Разложите многочлены на линейные множители:

а) $z^2 + 4z + 5$.

б) $z^3 - 3z^2 + 3z + 26$.

в) $4z^4 - 9$.

3.22. На комплексной плоскости найдите области, которым принадлежат точки, изображающие числа z, удовлетворяющие указанным условиям:

а) $\mathrm{Im} z > 5$.

б) $1 < |z - i| < 3$.

в) $|z| > 2 + \mathrm{Im} z$.

г) $-\mathrm{Re} z + |z| \leqslant 0$.

д) $|z| > |z+1|$.

Ответы

3.1. i; $-i$; -1; $-i$.
3.2. $4+i$; $2-3i$; $5+5i$; $0,2-1,4i$.
3.3. $-2-2i$.
3.4. а) $0,8+0,6i$; б) $0,6-2,8i$.
3.5. $-2,16+2,38i$.
3.6. Точки с координатами $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$; $(2;\ 0)$; $(1;\ -1)$; $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.
3.7.
а) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}$,

б) $5(\cos 0 + i\sin 0) = 5e^{i0}$,

в) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$,

г) $3\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

3.8. а) 1024; б) $512 - 512\sqrt{3}\cdot i$.

3.9. а) $\pm i$;

б) $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\sqrt[6]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$; $\sqrt[6]{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$;

в) $e^{i\frac{\pi}{8}}$; $e^{i\frac{5\pi}{8}}$; $e^{-i\frac{7\pi}{8}}$; $e^{-i\frac{3\pi}{8}}$.
3.10.
а) $\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-i$; $-\sqrt{3}+i$; $-\sqrt{3}-i$; $2i$; $-2i$;

б) $-\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$;

в) ± 1; $\pm i\sqrt{6}$;

г) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$;

д) $2+i$; $2i$;

е) 1.
3.11. $6\cos^5\varphi\sin\varphi - 20\cos^3\varphi\sin^3\varphi + 6\cos\varphi\sin^5\varphi$.

3.12.

а) Горизонтальная полоса, заключенная между прямыми $y=-\frac{2}{3}$, $y=0$.

б) Если $a=0$, то $x>0$ — правая полуплоскость без границы; если $a>0$ или $a<0$, то получаем точки, лежащие, соответственно, внутри или вне окружности $\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2a}\right)^2$.

3.13.

а) $40-32i$;

б) $5,5-5,5i$;

в) 1;

г) $18+26i$;

д) -14;

3.14.

а) $x=1;\ y=2$;

б) $x=2;\ y=\pm3$.

3.16. $-1,6+1,8i$.

3.17.

а) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$;

б) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

в) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$;

г) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

д) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$;

е) $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)=e^{-i\frac{5\pi}{8}}$;

ж) $5(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right))=5e^{i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}$.

3.18. $\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi-\sin^4\varphi$.

3.19.

а) i;

б) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $-1+i$;

г) 1;

д) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{5\pi}{12} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{5\pi}{12}$;

е) i.

3.18.
а) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; ± 1;

б) $\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)}$, $k = 0,\ 1,\ 2$;

г) $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\pm i\sqrt{5}$;

е) 5; $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $2 - i$; $-2 + i$;

з) 0; $\pm i$; $\pm\frac{i\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$; $\pm\frac{i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$;

и) $2 - 1,5i$.

3.21.
а) $(z + 2 - i)(z + 2 + i)$;

б) $$(z + 2)\left(z - \frac{5 - 3\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z - \frac{5 + 3\sqrt{3}i}{2}\right);$$

в) $\left(\sqrt{2}z + i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}z - i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}z + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}z - \sqrt{3}\right)$.

3.22.
а) Все точки плоскости, расположенные выше прямой $y = 5$.
б) Кольцо между окружностями с центром в точке $z = i$, радиусы которых $R_1 = 1$, $R_2 = 3$.
в) Множество точек, лежащих под параболой $y = \frac{x^2}{4} - 1$.
г) Луч OX, т.е. множество точек $(x;\ 0)$, для которых $x \geqslant 0$.
д) Полуплоскость $x < -\frac{1}{2}$.

Элементарная математика. Коротко о главном

Для решения задач высшей математики необходимо безупречное владение аппаратом элементарной математики. Напомним основные определения и формулы. Уточним, что в этой главе речь идет только о действительных числах.

Определение степени с целым показателем

Пусть $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}; \quad a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}; \quad a^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \text{ если } a \neq 0;$$

0^0 не определено.

Действия со степенями с целыми показателями

Пусть $m,\ k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}; \qquad \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}; \qquad (a^m)^k = a^{mk};$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Определение корня n-й степени

Корнем n-й степени из неотрицательного числа a $(n = 2,\ 3\ ,\ 4,\ \ldots)$ называют такое неотрицательное число, при возведении в степень n которого получается число a. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$, число a при этом называют подкоренным числом, а число n — показателем корня. Итак, по определению:

$$\text{если } a \geqslant 0,\ n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots, \text{ то 1) } \sqrt[n]{a} \geqslant 0;\ 2)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Выражение $\sqrt[n]{a}$ называют также радикалом (от латинского слова *radix* — корень), а операцию нахождения корня — извлечением корня.

Операцию извлечения корня определяют и для отрицательного подкоренного числа, но только в случае нечетного показателя корня. Полагают, что

$$\text{если } a < 0,\ n = 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ \text{то 1) } \sqrt[n]{a} < 0;\ 2)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Действия с корнями

Пусть $a \geqslant 0,\ b > 0;\ m,\ n,\ k \in \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$. Тогда

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}; \ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Для произвольного действительного числа a и $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \qquad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a.$$

Определение степени с рациональным показателем

Пусть $a > 0,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Введенное определение позволяет сохранить все привычные свойства степеней с целыми показателями, а именно:
пусть $p,\ q$ — рациональные числа, тогда

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}; \qquad (a^p)^q = a^{pq};$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2; \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2; \quad a^2-b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3; \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2); \qquad a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Модуль числа и его свойства

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда модулем числа x называется такое неотрицательное число $|x|$, которое равно

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Для модуля произведения, частного и степени имеем:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0; \quad |x^n| = |x|^n,\ n \in \mathbb{Z},\ x \neq 0.$$

Геометрический смысл модуля: $|x|$ есть расстояние от точки x числовой оси до точки 0.

Определение логарифма

Пусть $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$, тогда логарифмом числа x по основанию a называется показатель степени y, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число x. Таким образом, по определению:

$$y = \log_a x \ \Leftrightarrow \ a^y = x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$$

Свойства логарифмов

В этом пункте мы считаем, что $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$.
Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a x} = x.$$

Непосредственно из определения логарифма следуют равенства

$$\log_a a = 1;\ \log_a 1 = 0;\ \log_a a^p = p.$$

Кроме этого справедливо:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_a x^p = p\cdot\log_a x;\quad \log_{a^p} x = \frac{1}{p}\cdot\log_a x,\ p\neq 0;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ b>0,\ b\neq 1;\quad \log_a x = \frac{1}{\log_x a},\ x\neq 1.$$

Тригонометрия.
Основное тригонометрическое тождество и его следствия

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\quad \sin^2 x = 1-\cos^2 x;\quad \cos^2 x = 1-\sin^2 x;$$

$$1+\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};\qquad 1+\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Измерение углов в радианах

За 1 радиан принят такой угол, что 2π радиан составляют 360^0, т.е.

$$1\text{рад} = \frac{180^0}{\pi}\approx 57^0.$$

Углы в градусах	φ^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o	360^o
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^o}\cdot\varphi^o$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Основная таблица значений тригонометрических функций

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Формулы приведения

При преобразовании тригонометрической функции с аргументом $\pi \pm \alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ используются следующие правила:

1) если аргумент функции имеет вид $\pi \pm \alpha$, то название функции сохраняется; если аргумент функции имеет вид $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то название функции меняется на название кофункции: sin на cos (и наоборот), tg на ctg (и наоборот);

2) знак перед полученной функцией ставится такой, какой имеет

исходная функция, когда α принадлежит первой четверти.

Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y;$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y;$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Формулы понижения степени (или половинного аргумента)

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2};$$
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2};$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2};$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}; \quad \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}.$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right);$$
$$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right);$$
$$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right).$$

Определение обратных тригонометрических функций

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \arcsin x \quad\Leftrightarrow\quad x = \sin\alpha \quad\text{и}\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2};$$
$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \arccos x \quad\Leftrightarrow\quad x = \cos\alpha \quad\text{и}\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi;$$
$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arctg} x \quad\Leftrightarrow\quad x = \operatorname{tg}\alpha \quad\text{и}\quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2};$$
$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \operatorname{arcctg} x \quad\Leftrightarrow\quad x = \operatorname{ctg}\alpha \quad\text{и}\quad 0 < \alpha < \pi.$$

Области определения и множества значений обратных тригонометрических функций

$$
\begin{aligned}
&D(\arcsin x) = [-1; 1]; && E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \\
&D(\arccos x) = [-1; 1]; && E(\arccos x) = [0; \pi]; \\
&D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; +\infty); && E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \\
&D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; +\infty); && E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi).
\end{aligned}
$$

Обратные тригонометрические функции при отрицательных значениях аргумента

$$
\begin{array}{ll}
\arcsin(-a) = -\arcsin a; & \arccos(-a) = \pi - \arccos a; \\
\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a; & \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.
\end{array}
$$

Решение простейших тригонометрических уравнений

- $\sin x = a,\ |a| \leqslant 1 \ \Leftrightarrow\ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

  Особые случаи:

$$
\begin{aligned}
\sin x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \pi n, && n \in \mathbb{Z}; \\
\sin x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, && n \in \mathbb{Z}; \\
\sin x = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, && n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

- $\cos x = a,\ |a| \leqslant 1 \ \Leftrightarrow\ x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Особые случаи:

$$\begin{aligned}
&\cos x = 0 &&\Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, && n \in \mathbb{Z};\\
&\cos x = 1 &&\Leftrightarrow\ x = 2\pi n, && n \in \mathbb{Z};\\
&\cos x = -1 &&\Leftrightarrow\ x = \pi + 2\pi n, && n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

- $\operatorname{tg}\ x = a \ \Leftrightarrow\ x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

- $\operatorname{ctg}\ x = a \ \Leftrightarrow\ x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Определение многочлена от одной переменной

Многочленом степени n, $n \in \mathbb{N}$ от переменной x называется сумма одночленов $a_0,\ a_1x,\ a_2x^2, \ldots,\ a_{n-1}x^{n-1},\ a_nx^n$, где n — натуральное число, $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$ — произвольные числа, причем $a_n \neq 0$. Выражение вида

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0,\ \text{где } a_n \neq 0,$$

в котором одночлены расположены по убывающим степеням переменной x, называется *стандартной записью многочлена* n-й степени, числа $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots,\ a_1,\ a_0$ — *коэффициентами многочлена*, a_n — *коэффициентом при старшей степени*, a_0 — *свободным членом*. Если коэффициент при старшей степени $a_n = 1$, то многочлен называют *приведенным*, если $a_n \neq 1$ — *неприведенным*.
Все не равные нулю числа удобно считать *многочленами нулевой степени*.

Число x_0 называется *корнем многочлена* $p(x)$, если $p(x_0) = 0$. Многочлен степени n имеет не более n различных корней.

Квадратный трехчлен

Квадратный трехчлен — это многочлен степени 2:

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.
Если $D > 0$, то квадратный трехчлен имеет два различных корня $x_1,\ x_2$, которые можно найти по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \tag{23}$$

Если $D = 0$, то числа $x_1,\ x_2$, определяемые формулой (23), равны. В этом случае трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень, обозначаемый, как правило, x_0, и равный $-\frac{b}{2a}$. При этом говорят, что число x_0 является корнем кратности 2.
Если $D < 0$, то квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Если $D \geqslant 0$,то справедливы следующие теоремы:

Теорема 4.1.
Пусть $x_1,\ x_2$ — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c. Тогда он разлагается в произведение множителей $x - x_1$ и $x - x_2$ согласно формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{24}$$

Если $D = 0$, то корни x_1 и x_2 равны, обозначаются, как правило, символом x_0, и формула (24) принимает вид

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2, \text{ где } x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Теорема 4.2. (*Теорема Виéта*)
Если у квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ существуют корни $x_1,\ x_2$, то они удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 &= \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Многочлены более высокой степени

Для квадратных трехчленов и для многочленов более высокой степени справедлива следующая теорема:

Теорема 4.3. (*Теорема о тождественности многочленов*)
Два многочлена тождественны тогда и только тогда, когда имеют одинаковую степень, и коэффициенты при одноименных степенях переменной в обоих многочленах равны. То есть, если

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

то $a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \ldots,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0$.

Например, из тождества

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv 7x^3 + 5x^2 - 4x + 13$$

на основании теоремы (4.3) можно сразу получить значения коэффициентов $a,\ b,\ c,\ d$:

$$a = 7,\ b = 5,\ c = -4,\ d = 13.$$

Говорят, что *многочлен* $p(x)$ *делится на многочлен* $s(x)$ (без остатка), если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется тождество

$$p(x) \equiv s(x) \cdot q(x). \tag{25}$$

При этом используется та же терминология, что и при делении чисел: $p(x)$ — *делимое* (или кратное), $s(x)$ — *делитель*, $q(x)$ — *частное*. Как и для целых чисел, для многочленов рассматривают *деление с остатком*, возможность которого вытекает из следующей теоремы:

Теорема 4.4. *Для любых двух многочленов ненулевой степени* $p(x)$ *и* $s(x)$ *существует пара многочленов* $q(x)$ *и* $r(x)$ *такая, что степень многочлена* $r(x)$ *меньше степени многочлена* $s(x)$, *и выполняется тождество*

$$p(x) \equiv s(x) \cdot q(x) + r(x). \tag{26}$$

При этом многочлен $p(x)$ называют делимым, $s(x)$ — делителем, $q(x)$ — частным (или *неполным частным*), $r(x)$ — *остатком.* Формулу (25) можно считать частным случаем формулы (26), когда остаток $r(x) \equiv 0$.

Для деления многочлена $p(x)$ на многочлен $s(x)$ можно применять правило «деления углом», похожее на правило деления многозначных чисел. Чтобы получить старший член частного, делят старший член делимого $p(x)$ на старший член делителя $s(x)$. Полученный член частного умножают на делитель и произведение вычитают из делимого. Разделив старший член полученной первой разности на старший член делителя, находят второй член частного. Полученный второй член частного умножают на делитель и произведение вычитают из первой разности. С полученной второй разностью поступают так же: делят ее старший член на старший член делителя, находят тем самым третий член частного, затем умножают его на делитель, произведение вычитают из второй разности и т.д. Этот процесс либо приведет к делению многочлена $p(x)$ на многочлен $s(x)$ без остатка, либо на некотором шаге получится разность, степень которой меньше степени делителя, — эта разность и будет остатком $r(x)$.

П р и м е р 1. Проиллюстрируем это правило на примере деления многочлена $-3x^5 + 5x^4 + 3x - 1$ на многочлен $-x^2 + x + 1$

$\blacktriangleleft$
$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{r} -3x^5 + 5x^4 + 3x - 1 \\ \underline{-3x^5 + 3x^4 + 3x^3} \end{array} & \left|\begin{array}{l} -x^2 + x + 1 \\ \hline 3x^3 - 2x^2 + x - 1 \end{array}\right. \\
-\begin{array}{r} 2x^4 - 3x^3 + 3x - 1 \\ \underline{2x^4 - 2x^3 - 2x^2} \end{array} & \\
-\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 + 3x - 1 \\ \underline{-x^3 + x^2 + x} \end{array} & \\
-\begin{array}{r} x^2 + 2x - 1 \\ \underline{x^2 - x - 1} \end{array} & \\
3x \ (\text{остаток}) &
\end{array}
$$

Итак,

$$
-3x^5 + 5x^4 + 3x - 1 = \left(-x^2 + x + 1\right)\left(3x^3 - 2x^2 + x - 1\right) + 3x,
$$

или

$$\frac{-3x^5+5x^4+3x-1}{-x^2+x+1} = 3x^3-2x^2+x-1+\frac{3x}{-x^2+x+1}. \blacktriangleright$$

Особую значимость имеет случай деления многочлена $p(x)$ на двучлен $x-a$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 4.5. (*Теорема Безу́*)
Остаток от деления многочлена $p(x)$ на двучлен $x-a$ равен $p(a)$ — значению многочлена $p(x)$ при $x=a$.

Теорема (4.5) имеет важнейшее

Следствие. Если число $x=a$ является корнем многочлена $p(x)$, то многочлен $p(x)$ делится на $x-a$ без остатка и

$$p(x) = (x-a)q(x),$$

где $q(x)$ — многочлен степени, на единицу меньшей, чем степень $p(x)$.

Примечание. Если

$$p(x) = (x-a)^k \cdot s(x),$$

и при этом число $x=a$ не является корнем многочлена $s(x)$, то говорят, что многочлен $p(x)$ имеет *корень $x=a$ кратности k.*

Делить многочлен на двучлен $x-a$ можно «углом», как показано выше, а можно, используя метод сокращенного деления, называемый *схемой Горнера.*

Схема Горнера. Для нахождения результата деления многочлена $p(x)$ на двучлен $x-a$:

$$p(x) \equiv (x-a)\cdot q(x) + r(x), \tag{27}$$

запишем делимое $p(x)$ и частное $q(x)$ в стандартном виде:

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots b_1 x + b_0,$$

$$q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots c_1 x + c_0.$$

Подставив эти выражения в (27) и воспользовавшись теоремой (4.3) о тождественности многочленов, получим правила для нахождения коэффициентов частного и остатка:

$$\begin{array}{lcl} c_{n-1} & = & b_n, \\ c_{n-2} & = & a \cdot c_{n-1} + b_{n-1}, \\ c_{n-3} & = & a \cdot c_{n-2} + b_{n-2}, \\ \vdots & & \\ c_1 & = & a \cdot c_2 + b_2, \\ c_0 & = & a \cdot c_1 + b_1, \\ r & = & a \cdot c_0 + b_0. \end{array}$$

Применение схемы Горнера удобно оформить в виде таблицы:

	b_n	b_{n-1}	$\ldots$	b_1	b_0
a	$c_{n-1} = b_n$	$c_{n-2} = a \cdot c_{n-1} + b_{n-1}$	$\ldots$	$c_0 = a \cdot c_1 + b_1$	$r = a \cdot c_0 + b_0$

П р и м е р 2. Используя схему Горнера, разделите многочлен $7x^3 - 5x^2 - 4x - 13$ на $x - 2$.

◀ Заполним таблицу:

	7	-5	-4	-13
2	7	$2 \cdot 7 - 5 = 9$	$2 \cdot 9 - 4 = 14$	$2 \cdot 14 - 13 = 15$

и запишем результат деления:

$$7x^3 - 5x^2 - 4x - 13 = (x - 2)(7x^2 + 9x + 14) + 15. \blacktriangleright$$

Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами

При разложении на множители многочленов с целыми коэффициентами удобно пользоваться следующими теоремами:

Теорема 4.6. (*Теорема о целом корне*)
Пусть все коэффициенты многочлена $p(x)$ — целые числа. Тогда,

если целое число a является корнем многочлена $p(x)$, то a — делитель свободного члена многочлена $p(x)$.

Теорема 4.7. (*Теорема о рациональном корне*)
Пусть все коэффициенты многочлена $p(x)$ — целые числа. Тогда, если несократимая дробь (рациональное число) $\frac{m}{k}$ является корнем многочлена $p(x)$, то числитель дроби m — делитель свободного члена многочлена $p(x)$, а знаменатель дроби k — делитель коэффициента при старшей степени многочлена $p(x)$.

Теорема (4.7) имеет важнейшее

Следствие. Все рациональные корни приведенного многочлена являются целыми.

Проиллюстрируем применение вышеуказанных теорем на примерах.

П р и м е р 3. Разложите многочлен

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

на множители.

◀ Все коэффициенты многочлена: $1,\ -5,\ 2,\ 8$ — целые числа. Коэффициент при старшей — третьей — степени равен 1, следовательно многочлен $p(x)$ — приведенный, и все его рациональные корни являются целыми. Попробуем найти целочисленный корень этого многочлена. Если он есть, то, по теореме (4.6), его следует искать среди делителей свободного члена заданного многочлена, т. е. среди делителей числа 8. Выпишем эти делители — «кандидаты в целочисленные корни»: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8$. Вычисляя поочередно значения $p(x)$ при $x = 1,\ x = -1,\ x = 2$ и т.д., обнаруживаем, что $p(-1) = 0,\ p(2) = 0,\ p(4) = 0$. Это означает, что $x = -1,\ x = 2,\ x = 4$ являются корнями рассматриваемого многочлена. Поскольку $p(x)$ — многочлен степени 3, то число его различных корней не больше трех. Следовательно, других корней, кроме $x = -1,\ x = 2,\ x = 4$, многочлен не имеет, и его разложение на множители выглядит так:

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(x-2)(x-4). \blacktriangleright$$

П р и м е р 4. Разложите многочлен

$$p(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 3$$

на множители.

◀ Все коэффициенты многочлена: $2,\ 1,\ 5,\ -3$ — целые, но на этот раз многочлен не является приведенным. Согласно теореме (4.7) несократимая дробь $\frac{m}{k}$ может быть корнем этого многочлена только в том случае, если числитель дроби m является делителем свободного члена, а знаменатель дроби k — делителем коэффициента при старшей степени многочлена. Следовательно, возможные значения m — числа $\pm 1,\ \pm 3$, возможные значения k — числа 1 и 2, а возможные значения рационального корня — $\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 3,\ \pm\frac{3}{2}$.

Вычисление значений $p(x)$ при $x = \pm 1$ и $x = \pm 3$ показывает, что эти числа не являются корнями данного многочлена (таким образом, у многочлена нет целых корней). Продолжив вычисления, убеждаемся, что $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, а это означает, что $x = \frac{1}{2}$ является корнем (рациональным) данного многочлена $p(x)$. Согласно теореме Безу многочлен $p(x)$ делится на $x - \frac{1}{2}$ без остатка и его можно представить в виде

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot q(x).$$

Частное $q(x)$ найдем, используя схему Горнера:

	2	1	5	-3
$\frac{1}{2}$	2	$2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$	$2 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 6$	$6 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 0$

$$2x^3 + x^2 + 5x - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 2x + 6\right),$$

что удобнее записать следующим образом:

$$2x^3 + x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)\left(x^2 + x + 3\right).$$

Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + x + 3$ отрицателен, этот квадратный трехчлен не имеет действительных корней и не разлагается на линейные множители с действительными коэффициентами. Таким образом, окончательный результат разложения исходного многочлена на множители выглядит так:

$$2x^3 + x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)\left(x^2 + x + 3\right). \blacktriangleright$$

Основные элементарные функции. Области определения и множества значений

Областью определения $D(f)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл).

Напомним области определения основных элементарных функций:

$$\begin{aligned}
D\left(x^n\right) &= (-\infty; +\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
D\left(\tfrac{1}{x^n}\right) &= (-\infty; 0) \cup (0; +\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
D\left(\sqrt[2n]{x}\right) &= [0; +\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
D\left(\sqrt[2n+1]{x}\right) &= (-\infty; +\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
D\left(a^x\right) &= (-\infty; +\infty),\ a > 0,\ a \neq 1;\\
D\left(\log_a x\right) &= (0; +\infty),\ a > 0,\ a \neq 1;\\
D\left(\sin x\right) &= (-\infty; +\infty);\\
D\left(\cos x\right) &= (-\infty; +\infty);\\
D\left(\operatorname{tg} x\right) &= \left\{x \in \mathbb{R},\ x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\};\\
D\left(\operatorname{ctg} x\right) &= \left\{x \in \mathbb{R},\ x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\};
\end{aligned}$$

Множеством (областью) значений $E(f)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых

найдется число x_0 такое, что: $f(x_0) = y_0$.
Напомним множества значений основных элементарных функций:

$$\begin{aligned}
E\left(x^{2n}\right) &= [0;+\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
E\left(x^{2n+1}\right) &= (-\infty;+\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
E\left(\tfrac{1}{x^{2n}}\right) &= (0;+\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
E\left(\tfrac{1}{x^{2n+1}}\right) &= (-\infty;0) \cup (0;+\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
E\left(\sqrt[2n]{x}\right) &= [0;+\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
E\left(\sqrt[2n+1]{x}\right) &= (-\infty;+\infty),\ n \in \mathbb{N};\\
E\left(a^x\right) &= (0;+\infty),\ a > 0,\ a \neq 1;\\
E\left(\log_a x\right) &= (-\infty;+\infty),\ a > 0,\ a \neq 1;\\
E\left(\sin x\right) &= [-1;1];\\
E\left(\cos x\right) &= [-1;1];\\
E\left(\operatorname{tg} x\right) &= (-\infty;+\infty);\\
E\left(\operatorname{ctg} x\right) &= (-\infty;+\infty).
\end{aligned}$$

Напомним, что области определения и множества значений обратных тригонометрических функций мы рассмотрели ранее на странице 56.

Четность и нечетность функций

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого $x \in D(f)$ число $-x$ также принадлежит $D(f)$, и при этом справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy. Из числа элементарных функций четными являются $y = \cos x$ и $y = x^{2n}$, $y = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого $x \in D(f)$ число $-x$ также принадлежит $D(f)$, и при этом справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала отсчета. Из числа элементарных функций нечетными являются $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = x^{2n+1}$, $y = \frac{1}{x^{2n+1}}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

Периодичность функций

Функция $y = f(x)$ называется *периодической с периодом* T, если для любого $x \in D(f)$ число $x + T$ также принадлежит $D(f)$, и при этом справедливо равенство $f(x+T) = f(x)$.

Отметим, что если функция $y = f(x)$ периодична с периодом T, то при любом целом k справедливо также равенство $f(x + kT) = f(x)$. Положительное число T_0, наименьшее из всех таких чисел T, для которых $f(x+T) = f(x)$, называется *наименьшим периодом функции* $y = f(x)$. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ периодичны с наименьшим периодом, равным 2π, функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ периодичны с наименьшим периодом, равным π. Других периодических функций среди основных элементарных функций нет.

Графики элементарных функций

Степенная функция

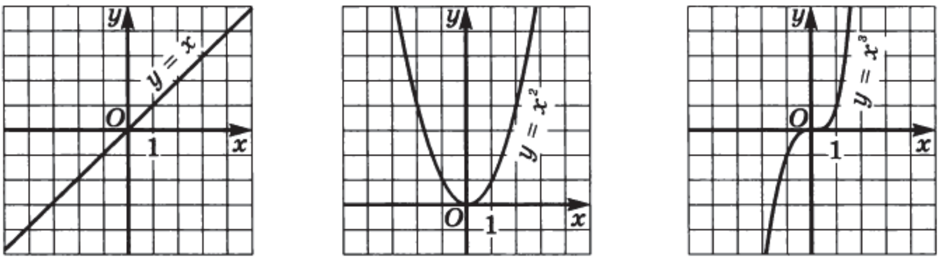


Рис. 4

Степенными функциями называют функции вида $y = x^r$, где r — любое рациональное число.

Если r — натуральное число, то получаем функцию $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, графиком которой при $n = 1$ является прямая, при $n = 2$ — парабола, при $n = 3$ — кубическая парабола, изображенные на рис. 4. График степенной функции $y = x^n$ при четных значениях n похож на параболу, при нечетных n — на кубическую параболу.

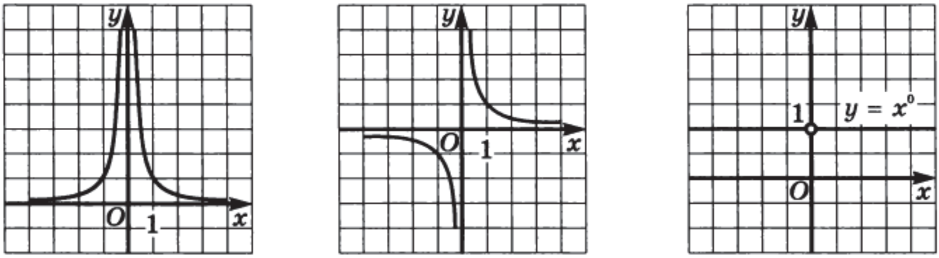


Рис. 5

Если r — неположительное целое число, то график степенной функции $y = x^r$ похож на графики рис. 5, соответственно, для четных, нечетных значений r и $r = 0$.

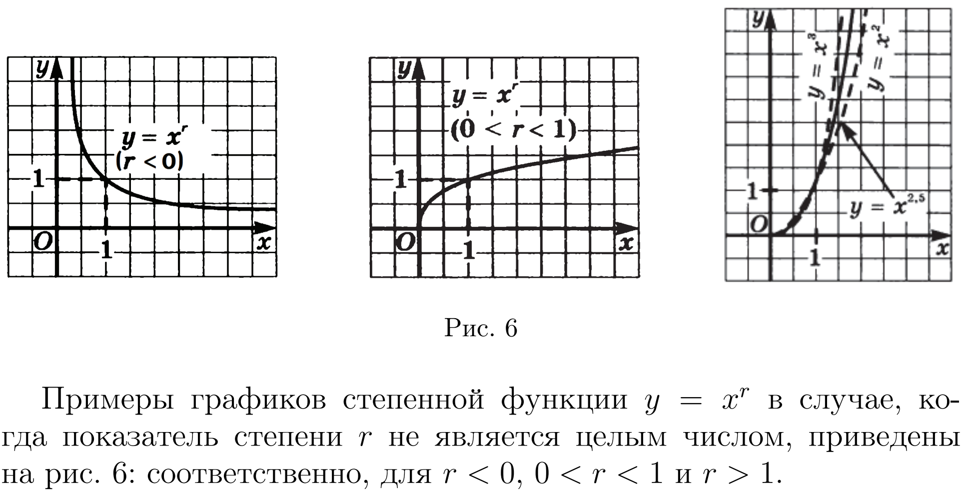


Рис. 6

Примеры графиков степенной функции $y = x^r$ в случае, когда показатель степени r не является целым числом, приведены на рис. 6: соответственно, для $r < 0$, $0 < r < 1$ и $r > 1$.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$

Функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n — четное натуральное число ($n = 2,\ 4,\ 6, \ldots$), является обратной по отношению к степенной функции $y = x^n,\ x \in [0; +\infty)$, и ее график получается из графика степенной функции с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (рис. 7).

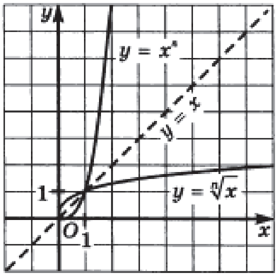


Рис. 7:
n — четное натуральное число

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетных натуральных n ($n = 3,\ 5,\ 7, \ldots$) является обратной по отношению к степенной функции $y = x^n,\ x \in (-\infty; +\infty)$. Она определена при $x \in (-\infty; +\infty)$, является нечетной, и ее график выглядит так, как показано на рис. 8.

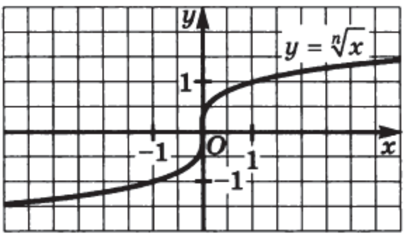


Рис. 8:
n — нечетное натуральное число

Показательная функция

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0,\ a \neq 1$ называют *показательной функцией*, а ее график — *экспонентой*. Примеры экспонент при различных значениях основания a приведены на рис. 9.

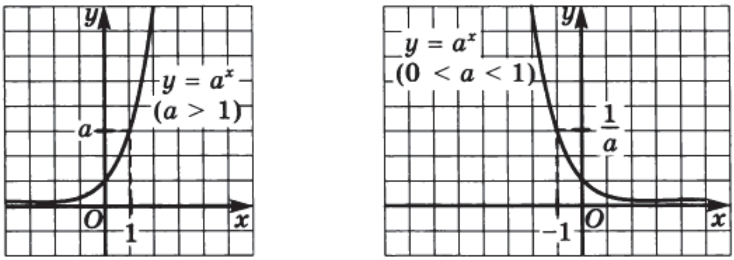


Рис. 9

Логарифмическая функция

Функцию вида $y = \log_a x$, где $a > 0,\ a \neq 1$ называют *логарифмической функцией*, а ее график — *логарифмической кривой*.

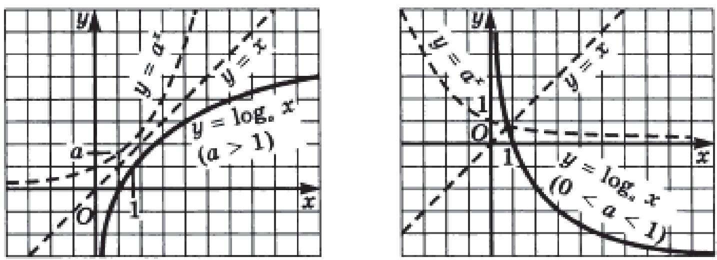


Рис. 10

Логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной функции $y = a^x$, поэтому логарифмическую кривую можно получить из экспоненты с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. Наглядное представление об этом преобразовании дает рис. 10.

Тригонометрические функции

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой* (рис. 11), часть графика, которая получается при $x \in [-\pi, \pi]$ — волной синусоиды (рис. 12), часть графика при $x \in [0, \pi]$ — аркой синусоиды (рис. 13).

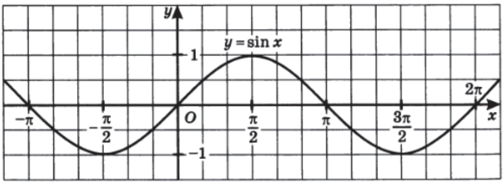


Рис. 11

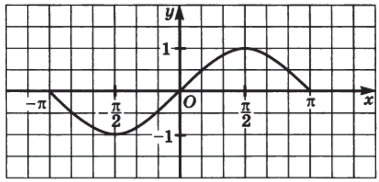


Рис. 12

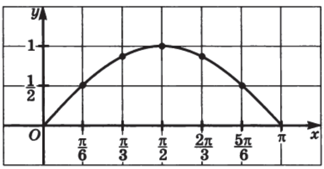


Рис. 13

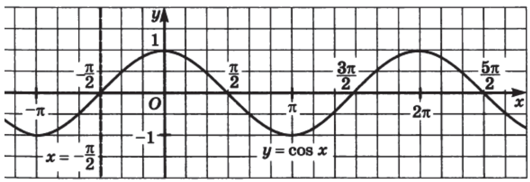


Рис. 14

Поскольку $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, график функции $y = \cos x$ получается из графика $y = \sin x$ параллельным переносом на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево. Этот график, также как и график функции $y = \sin x$, называют синусоидой (рис. 14).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*. Он состоит из бесконечного количества ветвей, полученных в результате параллельного переноса главной ветви графика (рис. 15). *Главной ветвью тангенсоиды*, как правило, называют часть графика, соответствующую $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ также состоит из бесконечного количества ветвей, полученных в результате параллельного переноса главной ветви (рис. 16), его главная ветвь заключена в полосе $x \in (0; \pi)$.

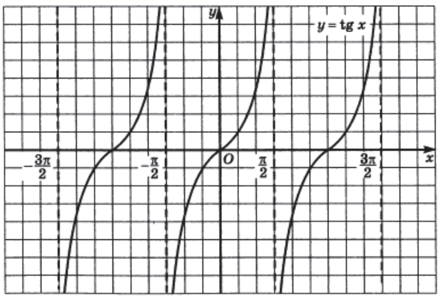


Рис. 15

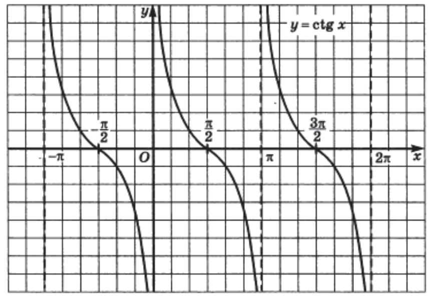
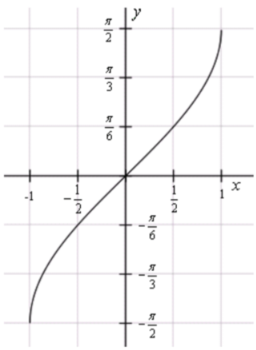
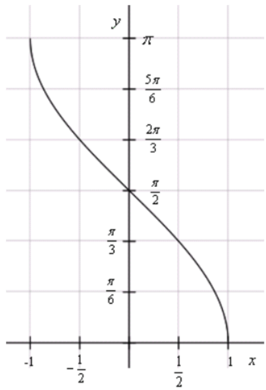


Рис. 16

Обратные тригонометрические функции



$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$

Рис. 17

Графики обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ приведены на рис. 17, функций $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ — на рис. 18.

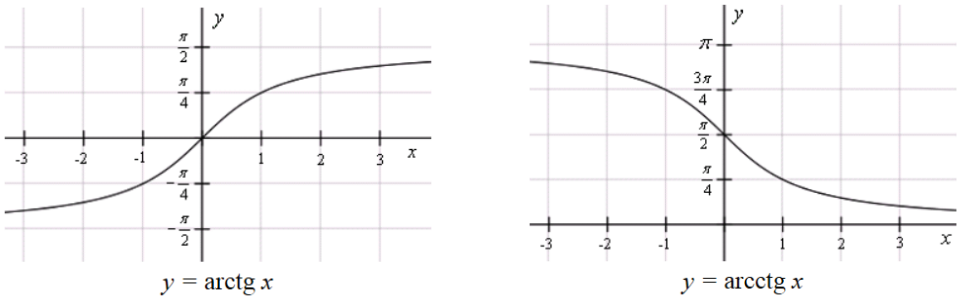


Рис. 18

Таблица производных основных элементарных функций

$$(c)' = 0, \ (c - \text{const}); \qquad (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \ (\alpha - \text{const});$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x;} \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(e^x)' = e^x; \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a;$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}; \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Правила дифференцирования функций

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)\ (k - \text{const}); \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)};$$

$$(f(g))'_x = f'_g \cdot g'_x,\ \text{где}\ g = g(x).$$

Геометрический смысл производной

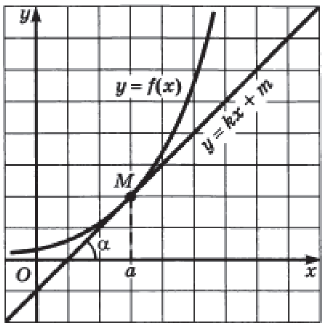


Рис. 19

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси Oy (рис. 19), то угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке $x = a$:

$$f'(a) = k = \operatorname{tg} a.$$

Физический (механический) смысл производной

Если $s = s(t)$ — зависимость пути от времени движения тела, то производная $s'(t_0)$ выражает мгновенную скорость тела в момент времени t_0:

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Задание для самостоятельной работы

4.1. Вычислите: $\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{24}$.

4.2. Вычислите: $3 \cdot \sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$.

4.3. Вычислите: $\left(-3 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{9}}\right)^5$.

4.4. Вычислите: $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[6]{25}$.

4.5. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{104} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{104} + 2}$.

4.6. Вычислите: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - 5^{-3} : 5^{-4}$.

4.7. Вычислите: $\dfrac{2^{-2} \cdot 5^4 \cdot 10^{-5}}{2^{-3} \cdot 5^3 \cdot 10^{-6}}$.

4.8. Вычислите: $\left(127\sqrt{2\sqrt[4]{8}} + \sqrt[4]{2\sqrt{32}}\right)^{-\frac{8}{7}} \cdot 512$.

4.9. Вычислите: $\left(\left(\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2}\right)^2 + 3\right) \cdot \left(\left(\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{2}\right)^2 - 3\right)$.

4.10. Вычислите: $64^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{324}$.

4.11. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[5]{-27}}{4^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-0,4}}$.

4.12. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}$.

4.13. Упростите: $\dfrac{8-27^n}{4+2\cdot 3^n+9^n}+3^n$.

4.14. Упростите выражение $\dfrac{9x-y}{3x+x^{0,5}y^{0,5}}$ и найдите его значение при $x=100$ и $y=576$.

4.15. Упростите выражение $\dfrac{3\left(\sqrt{a}-3\cdot\sqrt[4]{ab}\right)}{\sqrt[4]{ab}-3\sqrt{b}}$ и найдите его значение при $\dfrac{a}{b}=7\dfrac{58}{81}$.

4.16. Упростите выражение $\dfrac{9\cdot\sqrt[3]{8m}-3\cdot\sqrt[6]{8m}}{2-6\sqrt[6]{8m}}:\sqrt[6]{8m}$ и найдите его значение при $m=2014$.

4.17. Упростите выражение $56\left(\dfrac{a-16b}{\sqrt{a}-4\sqrt{b}}-\dfrac{a\sqrt{a}-64b\sqrt{b}}{a-16b}\right)$ и найдите его значение при $a=4$ и $b=0,04$.

4.18. Найдите значение выражения $\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^3+3\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^2+3\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)+1$ при $x=2015$.

4.19. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(3x-12)^4}-\sqrt[4]{(3x+12)^4}$ при $x<-2020$.

4.20. Известно, что значение выражения $\left(2\sqrt{6}-5\right)^2-10\sqrt{49-20\sqrt{6}}$ является целым числом. Найдите это число.

4.21. Известно, что значение выражения $\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}+\sqrt{2}$ является целым числом. Найдите это число.

4.22. Найдите значение выражения
$\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}-\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}$ при $x=2014$.

4.23. Упростите выражение: $\dfrac{\sin 8\beta}{\cos 4\beta}-2\sin 4\beta+0,29$.

4.24. Найдите значение выражения при $x=\dfrac{5\pi}{6}$:
$\sqrt{3}\cdot\left(\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}\right)$.

4.25. Найдите $\sin\beta$, если $\cos\beta=0,8$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

4.26. Найдите $\cos\beta$, если $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{7}{24}$ и $180^\circ<\beta<270^\circ$.

4.27. Найдите $\cos 2\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta=-1\dfrac{1}{3}$ и $270^\circ<\beta<360^\circ$.

4.28. Найдите $\sin(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-0,6$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
$\sin\beta=-0,6$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

4.29. Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-0,6$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
$\sin\beta=-0,6$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

4.30. Найдите $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\beta\right)$, если $\sin\beta=0,21$.

4.31. Найдите $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)$, если $\cos\beta=0,14$.

4.32. Найдите $\cos(\pi+\beta)$, если $\cos\beta = -0,19$.

4.33. Найдите $\sin(\pi-\beta)$, если $\sin\beta = -0,13$.

4.34. Найдите значение выражения
$\dfrac{\sin\left(\frac{13\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{ctg}(6\pi+\alpha)}{1+\sin(2\pi-\alpha)}$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha = 8$.

4.35. Найдите $\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta$, если $\sin(\alpha+\beta)=0,17$.

4.36. Найдите значение выражения
$$\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}\right)\cdot\sqrt{3}$$
при $\alpha-\beta=330^\circ$.

4.37. Упростите выражение
$\cos(\pi+2\alpha)+\sin(\pi+2\alpha)\cdot\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

4.38. Упростите выражение: $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}-\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha$.

4.39. Упростите выражение: $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}+\cos\alpha-\sin\alpha$.

4.40. Упростите выражение: $210+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos 2\alpha$.

4.41. Упростите выражение $4\sin^2 2\alpha+16\sin^4\alpha-16\sin^2\alpha$.

4.42. Упростите выражение: $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\mathrm{tg}\,(45^\circ-\alpha)\cos^2(45^\circ-\alpha)}$.

4.43. Вычислите $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^{-1}}$,

если $\sin 2\alpha = -0,8$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$.

4.44. Вычислите $24\mathrm{ctg}\,140^\circ\sin 75^\circ\mathrm{tg}\,40^\circ\cos 75^\circ$.

4.45. Вычислите $\dfrac{2\cos^2 48^\circ - 1}{2\left(\sin 186^\circ - \sin 6^\circ\right)}$.

4.46. Вычислите $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \dfrac{25}{4}$.

4.47. Вычислите $\log_{51} 17 + \dfrac{1}{\log_3 51}$.

4.48. Вычислите $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{1}{5} + 7^{\log_7 5}$.

4.49. Вычислите $\left(\sqrt{7}\right)^{\log_7 25}$.

4.50. Вычислите $3^{\log_{\sqrt{3}} 2}$.

4.51. Вычислите $10^{2-\lg 5}$.

4.52. Вычислите $\left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{\log_{25} 6}}$.

4.53. Вычислите $\left(\dfrac{5}{13}\right)^{5\log_{\frac{5}{13}} 2}$.

4.54. Вычислите $\log_{16}\log_4\log_2 16$.

4.55. Вычислите $\log_2 \dfrac{3}{5} + \log_4 \dfrac{25}{9}$.

4.56. Вычислите $2^{\log_8 27} + \log_2\log_6 \sqrt[8]{6}$.

4.57. Вычислите $\dfrac{\log_3 256}{\log_3 32}$.

4.58. Вычислите $10 \cdot \lg 49 \cdot \log_7 10 + 2^{\lg 7} \cdot 5^{\lg 7}$.

4.59. Вычислите $\dfrac{\log_3 4 + \log_3 \sqrt{10}}{\log_3 20 + 3\log_3 2}$.

4.60. Вычислите $\log_5 10 - \log_5 7 \cdot \log_7 9 \cdot \log_9 2$.

4.61. Вычислите $9^{\log_3(1+0{,}5+0{,}25+0{,}125+\ldots)}$.

4.62. Найдите $\dfrac{\lg^2 5 - 1}{\lg 5 - 2\lg\sqrt{10}} - \lg 5$.

4.63. Найдите $6^{-0{,}5+\log_6 \frac{\sqrt{3}}{2}} - 2^{-0{,}5+\log_2 0{,}5}$.

4.64. Найдите значение выражения
$(\log_5 9 + \log_3 25)^2 - (\log_5 9 - \log_3 25)^2$.

4.65. Найдите значения выражения
$\dfrac{\log_7^2 14 + \log_7 14 \cdot \log_7 2 - 2\log_7^2 2}{\log_7 14 + 2\log_7 2}$.

4.66. Представьте в виде степени с натуральным показателем. В ответе укажите полученный показатель:
$\dfrac{a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot \ldots \cdot a^{211}}{a \cdot a^3 \cdot a^5 \cdot a^7 \cdot \ldots \cdot a^{211}}$.

4.67. Упростите выражение $\dfrac{1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{15}}{1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^7}$ и найдите его значение при $a = 2$.

4.68. Решите уравнение $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Если корней несколько, то в ответе укажите наибольший корень.

4.69. Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} = 729$.

4.70. Решите уравнение $\log_x(2x+3) = 2$. Если корней несколько, то в ответе укажите наименьший корень.

4.71. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.

4.72. Решите уравнение $x(x-1)(x-2)(x-3) = 15$.

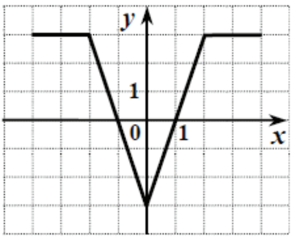
4.73. Решите уравнение $2x^3 - x^2 + 5x + 3 = 0$.

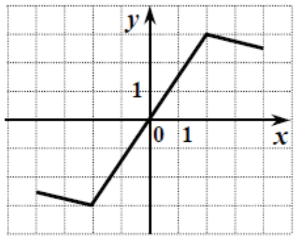
4.74. Разложите многочлен на множители: $3x^3 - x^2 - 27x + 9$.

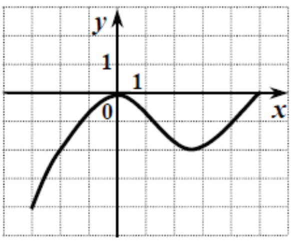
4.75. Разделите многочлен $p(x) = 2x^3 - 11x^2 + x + 7$ на многочлен $q(x) = x^2 + 3$.

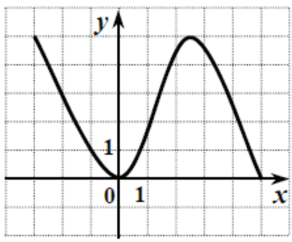
Задание для решения в аудитории

4.76. Укажите номер рисунка, на котором изображен график
а) функции, убывающей на промежутке $x \in [0; 2]$,
б) нечетной функции,
в) функции, множеством значений которой является отрезок $[0; 5]$,
г) четной функции.

1)


2)


3)


4)


4.77. Упростите выражение $\left(4^{-4p}\right)^2 \cdot \left(3 \cdot 2^{5p}\right)^3$.

4.78. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{250}}$.

4.79. Найдите значение выражения
$\log_5\frac{125}{7}+7^{2\log_7 25}+\log_{25}49+\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 3.$

4.80. Найдите производную функции
$y=13x^7-\cos 6x+3^x-\ln(2x+1)+\operatorname{tg}x\cdot\sqrt{x}+\dfrac{\sin x}{1-x}.$

4.81. Найдите области определения и множества значений функций:

а) $y=15\sin 14x$;

б) $y=\operatorname{ctg}x+2014$;

в) $y=\sqrt{x^2+9}$;

г) $y=\dfrac{210}{\sqrt{x+1}}$;

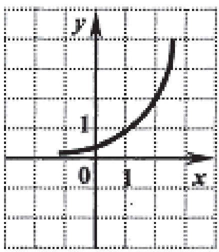
д) $y=\dfrac{9}{\sqrt{x^2+4}}$;

е) $y=6-\log_6(x+2015)$;

ж) $y=17\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x}$;

з) $y=\dfrac{1}{8^x+4}$.

4.82. Укажите функцию, график которой изображен на рисунке:
1) $y=2^x$. 2) $y=2^{x-1}-1$. 3) $y=\log_2(x-1)$. 4) $y=2^{x-1}$.



4.83. Решите неравенство: $\dfrac{x^2-8x+16}{5-x} \leqslant 0$.

4.84. Решите уравнение: $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

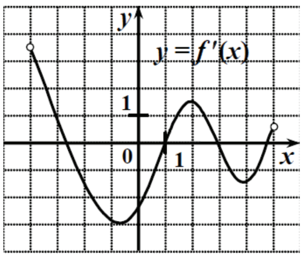
4.85. Решите неравенство: $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{7x} > \left(\dfrac{8}{125}\right)^{x-16}$.

4.86. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin^2 3\alpha - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\cdot\cos^2 3\alpha$, если $\alpha = \dfrac{\pi}{24}$.

4.87. К параболе $y = x^2+6x+8$ в точках ее пересечения с осью абсцисс проведены касательные. Найдите сумму тангенсов углов наклона этих касательных к положительному направлению оси OX.

4.88. Решите уравнение $\sqrt{2x^2-x-6} = -x$.

4.89. Функция определена на промежутке $(-4;5)$. На рисунке изображен график её производной. Определите число точек экстремума функции $y=f(x)$.



4.90. Решите уравнение

$$25x^2-20x+6 = \left(\sqrt{2}-\cos\frac{5\pi x}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\cos\frac{5\pi x}{4}\right).$$

4.91. Найдите значение выражения

$\log_2\left(12 + 2\log_2\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\log_2 12 - \log_2^2 3\right)$.

4.92. Найдите значение выражения

$\left(\dfrac{\sin(\alpha-\beta) + 2\cos\alpha\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos(\alpha-\beta)}\right)\cdot\sqrt{3}$ при $\alpha+\beta = 150^\circ$.

4.93. Упростите выражение

$\left(\dfrac{x^3-27}{x^2-9} - \dfrac{9x}{x+3}\right) : \left(1 - \dfrac{6}{x+3}\right)\cdot\dfrac{7}{x-3}$.

4.94. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси и имеет наименьший период, равный 3.
На промежутке $[-2; 1)$ значения функции $y = f(x)$ совпадают со значениями функции $y = x^3+5x^2-3x+1$. Найдите значение $f(2014)$.

4.95. Найдите все значения параметров a и b, при которых многочлены $p(x)$ и $q(x)$ тождественно равны:

$p(x) = 2ax - a - b,\ q(x) = 4x + 3a + b - 8$.

4.96. Разложите многочлен на линейные множители:

$5x^3 - 21x^2 - 21x + 5$.

4.97. Разложите многочлен на линейные множители:

$x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.

4.98. Разложите многочлен на линейные множители:

$5x^3 + 18x^2 - 18x + 4$

4.99. Разделите многочлен $p(x)$ на многочлен $q(x)$:

$p(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 4,\ q(x) = x^2 + 1$.

4.100. Сократите дробь: $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-2x^2-11x+12}$.

Ответы

4.1. 6. **4.2**. -5. **4.3**. -27. **4.4**. 5. **4.5**. 10. **4.6**. 20. **4.7**. 100. **4.8**. 1. **4.9**. 17. **4.10**. 1. **4.11**. -12. **4.12**. 6. **4.13**. 2. **4.14**. 0,6. **4.15**. 5. **4.16**. $-1,5$. **4.17**. 32. **4.18**. 2015 **4.19**. 24. **4.20**. -1. **4.21**. 3. **4.22**. -6. **4.23**. 0,29. **4.24**.1,5. **4.25**. $-0,6$. **4.26**. $-0,96$. **4.27**. 0,28. **4.28**. 0,28. **4.29**. $-0,96$. **4.30**. 0,21. **4.31**. $-0,14$. **4.32**. 0,19. **4.33**. $-0,13$. **4.34**. -8. **4.35**. 0,17. **4.36**. -1. **4.37**. 1. **4.38**. -2. **4.39**. 0. **4.40**. 210. **4.41**. 0. **4.42**. 1. **4.43**. 0,6. **4.44**. -6. **4.45**. 0,25. **4.46**. 2. **4.47**. 1. **4.48**. 3. **4.49**. 5. **4.50**. 4. **4.51**. 20. **4.52**. 25. **4.53**. 32. **4.54**. 0. **4.55**. 0. **4.56**. 0. **4.57**. 1,6. **4.58**. 27. **4.59**. 0,5. **4.60**. 1. **4.61**. 4. **4.62**. 1. **4.63**. 0. **4.64**. 16. **4.65**. 1. **4.66**. 11130. **4.67**. 257. **4.68**. 2,5. **4.69**. -2. **4.70**. 3. **4.71**. -2. **4.72**. $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$. **4.73**. $-0,5$. **4.74**. $(3x-1)(x-3)(x+3)$. **4.75**. $2x-11+\frac{-5x+40}{x^2+3}$. **4.76**. а) 3; б) 2; в) 4; г) 1. **4.77**. $\frac{27}{2^p}$. **4.78**. 8,4. **4.79**. 629. **4.80**. $91x^6+6\sin 6x+3^x\cdot\ln 3-\frac{2}{2x+1}+\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}+\frac{\mathrm{tg}\ x}{2\sqrt{x}}+\frac{(1-x)\cos x+\sin x}{(1-x)^2}$.

4.81. а) $D(y)=(-\infty;+\infty),\ E(y)=[-15;15]$;

б) $D(y)=\{x\in\mathbb{R}, x\neq\pi k, k\in\mathbb{Z}\}$; $E(y)=(-\infty;+\infty)$;

в) $D(y)=(-\infty;+\infty),\ E(y)=[8;+\infty)$;

г) $D(y)=(-1;+\infty),\ E(y)=(0;+\infty)$;

д) $D(y)=(-\infty;+\infty),\ E(y)=(0;4,5]$;

е) $D(y)=(-2015;+\infty),\ E(y)=(-\infty;+\infty)$;

ж) $D(y)=(-\infty;+\infty),\ E(y)=(0;+\infty)$;

з) $D(y)=(-\infty;+\infty),\ E(y)=(0;0,25)$.

4.82. 4. **4.83**. $\{4\}\cup(5;+\infty)$. **4.84**. $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **4.85**. $(4,8;+\infty)$. **4.86**. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$. **4.87**. 0. **4.88**. -2. **4.89**. 4. **4.90**. 0,4. **4.91**. 3. **4.92**. 1. **4.93**. 7. **4.94**. 19. **4.95**. $a=2,\ b=0$. **4.96**. $(x+1)(x-5)(5x-1)$. **4.97**. $(x+1)^2(x+2)$. **4.98**. $(5x-2)(x+2-\sqrt{6})(x+2+\sqrt{6})$. **4.99**. $x^3-3x^2+4x-4-\frac{2x}{x^2+1}$. **4.100**. $\frac{1}{x-4}$.

Список литературы

[1] Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. *Задачи по математике. Алгебра*: Справочное пособие. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

[2] Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х. *Пособие по математике для поступающих в вузы*: Учебное пособие/ Под ред. Г.Н. Яковлева. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

[3] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость*: Учебное пособие/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[4] Мордкович А.Г., Семенов П.В. *Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень). В 2 ч. Ч. 1*: Учебник. — 6-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2012.

[5] Мордкович А.Г., Семенов П.В. *Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (профильный уровень). В 2 ч. Ч. 1*: Учебник. — 6-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2009.

[6] Кочагин В.В., Кочагина М.Н. *ЕГЭ 2014. Математика*: Сборник заданий. — М.: Эксмо, 2013.

Содержание

Татьяна Владимировна Кропотова,
Вениамин Григорьевич Подольский,
Павел Евгеньевич Кашаргин

Введение в высшую математику.
1 семестр